Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des maths I

Semestre d'automne 2021-2022

Seconde Chance – Durée 90 min – le vendredi 28 janvier 2022
Corrigé

Exercice 1. Polynômes. Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. Exprimer le degré de P' en fonction du degré de P.
2. On suppose que $P = (P')^2$. Déterminer P.

Solution.

1. Si $\deg P > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$. Si $\deg P \leq 0$, alors $\deg P = -\infty$.
2. Il y a une solution évidente $P = P' = 0$. Sinon, $\deg P' \geq 0$ et $\deg P = \deg(P')^2 = 2\deg P' = 2(\deg P - 1)$, d'où $\deg P = 2$. On pose $P(X) = aX^2 + bX + c$. Alors $P'(X) = 2aX + b$ et
$$aX^2 + bX + c = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2.$$
Ainsi $4a^2 = a$, $b = 4ab$ et $c = b^2$. Ceci donne $a = 1/4$, b quelconque et $c = b^2$. Les solutions sont donc $P = 0$ ou $P = X^2/4 + bX + b^2$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Arithmétique.

1. On cherche à trouver le chiffre ℓ des unités dans l'écriture en base 10 de $7^{(9^{11})}$.
   (a) Trouver un petit entier $n > 0$ tel que $7^n \equiv 1 \mod 10$.
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 9^{11} par n.
   (c) Conclure et donner la valeur de ℓ.
2. (a) Calculer $\text{pgcd}(323, 133)$ et trouver des coefficients de Bézout associés aux entiers 323 et 133.
   (b) Montrer que l'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ tels que
$$x \equiv 4 \mod 323 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 23 \mod 133$$
   est égal à
$$\{4 + 19y : y \in \mathbb{Z} \quad \text{vérifie} \quad y \equiv 0 \mod 17 \quad \text{et} \quad y \equiv 1 \mod 7\}.$$
   (c) Donner toutes les solutions du système de congruences
$$x \equiv 4 \mod 323 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 23 \mod 133.$$

Solution.

1. (a) On a $7^2 = 49 \equiv -1 \mod 10$ et donc $7^4 \equiv (-1)^2 = 1 \mod 10$. Ainsi on peut prendre $n = 4$.
   (b) $9^{11} \equiv 1^{11} = 1 \mod 4$, donc $9^{11} = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   (c) On a $7^{(9^{11})} = 7^{4k+1} = (7^4)^k \cdot 7 \equiv 1^k \cdot 7 = 7 \mod 10$. Ainsi $\ell = 7$.
2. (a)
$$\begin{aligned} 323 &= 133 \cdot 2 + 57 \\ 133 &= 57 \cdot 2 + 19 \\ 57 &= 19 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$
   Ainsi $\text{pgcd}(323, 133) = 19$, et
$$19 = 133 - 57 \cdot 2 = 133 - (323 - 133 \cdot 2) \cdot 2 = 133 \cdot 5 - 323 \cdot 2.$$
   Des coéfficients de Bézout pour $(323, 133)$ sont ainsi $(-2, 5)$.

(b) Soit $x = 4 + 19y$ avec $y \equiv i \mod 17$ et $y \equiv j \mod 7$, avec $0 \leq i < 17$ et $0 \leq j < 7$. Alors il y a $k, k' \in \mathbb{Z}$ avec $y = 17k + i = 7k' + j$, et

$$x = 19y+4 = 19\cdot(17k+i)+4 = 323k+19i+4 \quad \text{et} \quad x = 19y+4 = 19\,(7k'+j)+4 = 133k'+19j+4.$$

Ainsi $x \equiv 19i + 4 \equiv 4 \mod 323$ et $x \equiv 19j + 1 \equiv 23 \mod 133$ si et seulement si $i = 0$ et $j = 1$.

(c) $y \equiv 0 \mod 17$ donne $y = 17k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Alors $1 \equiv y = 17k \equiv 3k \mod 7$ a une solution évidente $k = -2$. Donc $y_0 = 17 \cdot (-2) = -34$ est une solution particulière. Or, 17 et 7 sont premiers entre eux, et y est une autre solution si et seulement si $y - y_0$ est divisible par 17 et par 7, soit par $\mathrm{ppcm}(17, 7) = 17 \cdot 7 = 119$. Donc $y \in -34 + 119\mathbb{Z}$, soit $x = 4 + 19y \in 4 + 19\,(-34 + 119\mathbb{Z}) = -642 + 2261\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Les complexes.

1. Donner une racine carrée de $15 - 8i$ sous forme algébrique. [Indication : le carré de 17 vaut 289.]
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2 - 3i)z - (5 + i) = 0$.

Solution.

1. Soit $\delta = a + ib$ avec $15 - 8i = \delta^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Enragerdant partie réelle, imaginaire et module, on trouve :

$$a^2 - b^2 = 15, \qquad 2ab = -8, \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Ainsi $2a^2 = 32$ et $a = \pm 4$, d'où $b = -8/2a = \mp 1$ et $\delta = \pm(4 - i)$.

2. On a le discriminant $\Delta = (-2+3i)^2 - 4\,(-5-i) = 4-9+20-12i+4i = 15-8i$. Or, $(\pm(4-i))^2 = \Delta$ d'après 1. Les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{(2 - 3i) + (4 - i)}{2} = 3 - 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{(2 - 3i) - (4 - i)}{2} = -1 - i.$$

Exercice 4. Suites. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont décroissantes.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers les réels que l'on notera ℓ pour (u_n) et ℓ' pour (v_n).
4. Montrer que si $\ell \neq 0$ alors $\ell' = 0$. En déduire que $\ell\ell' = 0$.
5. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et en déduire ℓ et ℓ'.

Solution.

1. Initialisation : On a $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$. Hypothèse : Supposons $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Hérédité : Alors $u_n + v_n > 0$, $u_n^2 > 0$ et $v_n^2 > 0$, d'où $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} > 0$. L'énoncé est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On a $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \leq \frac{u_n^2}{u_n} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \leq \frac{v_n^2}{v_n} = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les deux suites sont donc décroissantes.
3. Les deux suites sont décroissantes et minorées par 0, donc convergentes. On note que $\ell, \ell' \geq 0$.
4. Supposons $\ell > 0$. Alors

$$\ell' = \lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} v_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{\ell'^2}{\ell + \ell'}\,;$$

puisque $\ell + \ell' > 0$ ceci donne $\ell'^2 = \ell'\,(\ell + \ell') = \ell'^2 + \ell\ell'$, et $\ell\ell' = 0$. Alors $\ell > 0$ implique $\ell' = 0$. Ainsi, dans tous les cas, $\ell\ell' = 0$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - \frac{v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = u_n - v_n.$$

Ainsi $(u_n - v_n)_n$ est constante, de valeur $u_n - v_n = u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$. Donc $\ell - \ell' = \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = -1$; comme $\ell\ell' = 0$ et $\ell, \ell' > 0$ on a $\ell = 0$ et $\ell' = 1$.

Exercice 5. Étude de fonctions. On cherche à étudier la fonction

$$f(x) = \ln(\cos^2 x).$$

1. Justifier que $f(x)$ est bien définie dès que $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
   On note $D_f = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le domaine de f.
2. Déterminer la parité de f. Montrer que f est π-périodique.
3. Calculer la fonction dérivée de f sur D_f. Déterminer le signe de f' sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Calculer la limite de f à gauche de $\frac{\pi}{2}$ et sa valeur en 0.
5. Donner la table de variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
6. Tracer le graphe de f, en indiquant ses asymptôtes.

Solution.

1. Pour $x \in D_f$ on a $\cos x \neq 0$, donc $\cos^2 x > 0$ et $\ln(cos^2 x)$ est bien défini.
2. cos est paire, donc f aussi. $\cos^2$ est π-périodique, donc f aussi.
3. $f'(x) = \frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^2 x} = -2\tan x$. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\tan x > 0$, donc $f'(x) < 0$. Et $f'(0) = 0$.
4. On a $f(0) = \ln 1 = 0$, et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$, en posant $y = \cos^2 x$.
5. On a

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

6. On a