Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des maths I

Semestre d'automne 2021-2022

Seconde Chance – Durée 90 min – le vendredi 28 janvier 2022

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé comporte cinq exercices.

Exercice 1. Polynômes. Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. Exprimer le degré de P' en fonction du degré de P.
2. On suppose que $P = (P')^2$. Déterminer P.

Exercice 2. Arithmétique.

1. On cherche à trouver le chiffre ℓ des unités dans l'écriture en base 10 de $7^{(9^{11})}$.
   (a) Trouver un petit entier $n > 0$ tel que $7^n \equiv 1 \mod 10$.
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 9^{11} par n.
   (c) Conclure et donner la valeur de ℓ.
2. (a) Calculer $\text{pgcd}(323, 133)$ et trouver des coefficients de Bézout associés aux entiers 323 et 133.
   (b) Montrer que l'ensemble des x dans $\mathbb{Z}$ tels que
   $$x \equiv 4 \mod 323 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 23 \mod 133$$
   est égal à
   $$\{4 + 19y : y \in \mathbb{Z} \quad \text{vérifie} \quad y \equiv 0 \mod 17 \quad \text{et} \quad y \equiv 1 \mod 7\}.$$
   (c) Donner toutes les solutions du système de congruences
   $$x \equiv 4 \mod 323 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 23 \mod 133.$$

Exercice 3. Les complexes.

1. Donner une racine carrée de $15 - 8i$ sous forme algébrique. [Indication : le carré de 17 vaut 289.]
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2 - 3i)z - (5 + i) = 0$.

Exercice 4. Suites. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers les réels que l'on notera ℓ pour (u_n) et ℓ' pour (v_n).
4. Montrer que si $\ell \neq 0$ alors $\ell' = 0$. En déduire que $\ell\ell' = 0$.
5. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 5. Étude de fonctions. On cherche à étudier la fonction

$$f(x) = \ln(\cos^2 x).$$

1. Justifier que $f(x)$ est bien défnie dès que $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
   On note $D_f = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le domaine de f.
2. Déterminer la parité de f. Montrer que f est π-périodique.
3. Calculer la fonction dérivée de f sur D_f. Déterminer le signe de f' sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Calculer la limite de f à gauche de $\frac{\pi}{2}$ et sa valeur en 0.
5. Donner la table de variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
6. Tracer le graphe de f, en indiquant ses asymptôtes.