Université Lyon 1, Fondamentaux des mathématiques II - Partie A

Année Universitaire 2021 – 2022

Chapitre 2 : algèbre matricielle

Exercice 1 — Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer chacune des matrices suivantes si cela est possible. Si tel n'est pas le cas, expliquer pourquoi.

(a) $3C - 4D$	(b) $A - (D + 2C)$	(c) $A - E$	(d) AE
(e) $3BC - 4BD$	(f) $CB + D$	(g) GC	(h) FG
(h) $3A - 2^tE$	(i) ${}^tAB$	(j) ${}^tBA$	(k) $3^tA - 2E$
(l) $C^tC + FG$	(m) $({}^tF + G)D$	(n) $(B - E)^tA$	(o) ${}^tD(F +^t G)$

Exercice 2 — Illustrer l'associativité de la multiplication matricielle en calculant $(AB)C$ et $A(BC)$, où A, B et C sont les matrices ci-dessus.

Exercice 3 — Soit A une matrice carrée de taille n. Soit $m \in \mathbf{N}$. De manière naturelle, on définit A^m comme étant le produit de m copies de A ; noter que cette définition à un sens grâce à l'associativité de la multiplication matricielle.

(i) Calculer A^4 avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Donner un contre-exemple à l'assertion fausse suivante :

$$(AB)^2 = A^2B^2 \ \textit{ pour toutes matrices carrées } \ A, B.$$

(iii) Avec quelle condition supplémentaire l'assertion précédente devient-elle vraie?

Exercice 4 — Soit A, B et C trois matrices de taille $m \times n$. Démontrer que, si $A + C = B + C$, alors $A = B$.

Exercice 5 — On sait que la multiplication matricielle n'est pas commutative. Pour aller plus loin, exhiber deux matrices A et B telles que les produits AB et BA soient bien définis mais aient des tailles *différentes*.

Exercice 6 — Donner des exemples de matrices A, B et C de taille 2×2 telles que :

(i) $AB = 0$, mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$;

(ii) $AB = AC$, mais $B \neq C$;

(iii) $A^2 = A$, mais $A \neq 0$ et $A \neq I_2$.

Exercice 7 — Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

(i) L'écrire sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$.

(ii) Utiliser le calcul matriciel pour déterminer si les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sont ou non des solutions de ce système linéaire.

Exercice 8 — Considérons un système linéaire homogène écrit sous la forme d'une équation matricielle $AX = 0$, avec $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$. En utilisant le calcul matriciel, démontrer que si deux vecteurs u, v sont des solutions de ce système et $r \in \mathbf{K}$, alors les vecteurs $u+v$ et ru en sont également.

Exercice 9 — Déterminer si chacune des matrices suivantes est ou non inversible. Si c'est le cas, calculer la matrice inverse.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \\ 4 & -6 & -3 & -5 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (d) D^tD, où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 10 — Pour chaque système linéaire, déterminer si la matrice de ses coefficients est inversible ; si tel est la cas, en déduire ses solutions.

(a) $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$

Exercice 11 —Exhiber deux matrices 2×2 inversibles A et B telles que la matrice $A + B$ ne soit pas inversible.

Exercice 12 — Donner une matrice 2×2 différente de la matrice identité et dont la transposée est l'inverse.

Exercice 13 — Soit A une matrice $n \times n$ inversible.

(i) Démontrer que A^m est inversible pour tout $m \in \mathbf{N}$ et exprimer son inverse en fonction de A^{-1}.

(ii) Démontrer que la matrice ${}^tA$ est inversible, et exprimer son inverse en fonction de A^{-1}.

Exercice 14 — Soit A et B deux matrices $n \times n$. Démontrer que si AB est inversible, alors A et B le sont également.

Exercice 15 — Une matrice $n \times n$ est dite *symétrique* si ${}^tA = A$, *anti-symétrique* si ${}^tA = -A$.

(i) Donner des exemples de matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de tailles 2×2, 3×3 et 4×4.

(ii) Que peut-on dire des coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique?

(iii) Déterminer toutes les matrices qui sont simultanément symétriques et anti-symétriques.

(iv) Démontrer que, pour tout matrice A de taille $n \times n$, les matrices $A +^t A$, A^tA et ${}^tAA$ sont symétriques, puis que la matrice $A -^t A$ est anti-symétrique.

(v) Démontrer que toute matrice $n \times n$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Exercice 16 — Prédire le résultat de chaque multiplication par une matrice de permutation, puis vérifier votre réponse par le calcul.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 — Préduire le résultat de chaque multiplication par une matrice élémentaire, puis vérifier votre résultat par le calcul.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 — Prédire le résultat de chaque multiplication par une matrice diagonale, puis vérifier votre réponse par le calcul.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 — Déterminer

(i) une matrice 3×3 qui, par multiplication à gauche avec une matrice A de taille $3 \times n$, échange les lignes 1 et 2 de A.

(ii) une matrice 2×2 qui, par multiplication à droite avec une matrice A de taille $m \times 2$, échange les colonnes 1 et 2 de A.

Exercice 20 — Démontrer que la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admet une infinité d'inverses à droite (c'est-à-dire des matrices $A \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbf{R})$ telles que $HA = I_2$), mais aucun inverse à gauche (c'est-à-dire des matrices $B \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telles que $BH = I_3$.)

Exercice 21 — Soit T une matrice carrée $n \times n$ telle que $T^4 = 0$.

Démontrer que la matrice $I_n - T$ est inversible, d'inverse

$$I_n + T + T^2 + T^3.$$

Comment peut-on généraliser cette observation?

Exercice 22 — Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 23 — On désigne par E_n le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, vérifier que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1 ;

   (ii) $AE_n = E_m$.

2. En utilisant la question précédente, démontrer que si deux matrices $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ vérifient la condition (i), alors la matrice AB la vérifie également.

3. En s'inspirant des questions précédentes, démontrer la propriété suivante : si la somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice carrée inversible est égale à k, alors la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice inverse est égale à $1/k$.