Université Lyon 1, Fondamentaux des mathématiques II - Partie A

Année Universitaire 2020 – 2021

Chapitre 1 : résolution des systèmes linéaires[1]

Sauf mention expresse du contraire, tous les calculs se font dans le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

1. L'algorithme de Gauss

Exercice 1.1 — Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre chaque système.

$$(a)\ \begin{cases} 2x+3y=13 \\ x-\ \ y=-1 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x \qquad -z=0 \\ 3x+y \qquad =1 \\ -x+y+z=4 \end{cases}$$

Exercice 1.2 — Les systèmes suivants sont sous forme échelonnée. Déterminer pour chacun d'eux si l'ensemble de solutions est vide, réduit à un élément ou bien infini.

$$(a)\ \begin{cases} -3x+2y=0 \\ \quad -2y=0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x+y \qquad =4 \\ \quad y-z=0 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x+y \qquad =4 \\ \quad y-z \ =0 \\ \qquad 0=0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x+y \ =4 \\ \quad 0=4 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} 3x+6y+z \ =-0 \\ \qquad 5 \\ \qquad -z \ =2 \\ \qquad 5 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} x-3y \ =2 \\ \quad 0=0 \end{cases} \qquad (g)\ \begin{cases} 2x+2y \ =4 \\ \quad y \ =1 \\ \quad 0=4 \end{cases} \qquad (h)\ \begin{cases} 2x+y=0 \end{cases}$$

$$(i)\ \begin{cases} x-y \ =-1 \\ \quad 0=0 \\ \quad 0=4 \end{cases} \qquad (j)\ \begin{cases} x+y-3z \ =-1 \\ \quad y-\ \ z \ =2 \\ \qquad z \ =0 \\ \qquad 0=0 \end{cases}$$

Exercice 1.3 — Résoudre chacun des systèmes suivants par l'algorithme de Gauss.

$$(a)\ \begin{cases} 2x+2y=5 \\ x-4y=0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} -x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x-3y+\ \ z=1 \\ x+\ \ y+2z=14 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} -x-\ \ y=1 \\ -3x-3y=2 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} \qquad 4y+z=20 \\ 2x-2y+z=0 \\ x \qquad +z=5 \\ x+\ \ y+z=10 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} w+2x \qquad +\ \ z=5 \\ -w \qquad +y \qquad =-1 \\ -w+3x \qquad -\ \ z=0 \\ w+4x+y+2z=9 \end{cases}$$

Exercice 1.4 — Résoudre chacun des systèmes suivants par l'algorithme de Gauss.

$$(a)\ \begin{cases} x+y \qquad +Z=5 \\ x-y \qquad \quad =0 \\ \quad y+2z \qquad =7 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 3x \qquad +\ \ z=7 \\ x-\ \ y+3z=4 \\ x+2y-5z=-1 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x+3y+\ \ z=0 \\ -x-\ \ y \qquad =2 \\ -x+\ \ y+2z=8 \end{cases}$$

[1] Ces exercices sont une traduction en français des exercices du premier chapitre de *Linear Algebra*, de Jim Hefferon.

Exercice 1.5 — L'algorithme de Gauss n'est pas la seule façon de résoudre un système linéaire. Une méthode souvent employée consiste à utiliser une équation pour exprimer l'une des variables en fonction des autres, puis à lui substituer l'expression obtenue dans les autres équations. On itère ce processus jusqu'à obtenir une équation portant sur une seule variable, que l'on résoud. On détermine alors les autres variables en reprenant de proche en proche les formules de substitution. Cette méthode requiert plus de calculs, ce qui la rend plus longue et plus délicate que celle de Gauss. Voici une illustration simple de la manière dont cette approche peut conduire à des erreurs... Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

(i) Exprimer x en fonction de y en utilisant la première équation, puis substituer cette expression dans la deuxième ; en déduire y.

(ii) Exprimer x en fonction de y en utilisant la première équation, puis substituer cette fois l'expression obtenue dans la troisième équation ; en déduire y.

Quelle étape supplémentaire doit-on ajouter à cette méthode pour ne pas conclure, de manière erronée, que le système possède une solution?

Exercice 1.6 — Pour quelles valeurs de $k \in \mathbf{R}$ l'ensemble des solutions du système suivant est-il vide? un singleton? infini?

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = k \end{cases}$$

Exercice 1.7 — Le système

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma & = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma & = 10 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma & = 9 \end{cases}$$

n'est pas linéaire par rapport aux variables α, β, γ. On peut cependant appliquer l'algorithme de Gauss... Ce système a-t-il une solution?

Exercice 1.8 — À quelles conditions les réels b_1, b_2, b_3 et b_4 doivent-ils satisfaire pour que chacun des systèmes suivants admette une solution? (*Indication : appliquer l'algorithme de Gauss et examiner ce qui arrive au second membre.*)

$$(a) \begin{cases} x - 3y = b_1 \\ 3x + y = b_2 \\ x + 7y = b_3 \\ 2x + 4y = b_4 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2 \\ x_1 + 8x_3 = b_3 \end{cases}$$

Exercice 1.9 — L'assertion

un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations admet toujours une solution

est-elle vraie ou fausse? Justifiez votre réponse (par une démonstration si vous répondez oui, par un contre-exemple si vous répondez non).

Exercice 1.10 – Déterminer les coefficients a, b et c tels que le graphe de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points $(1, 2), (-1, 6)$ et $(2, 3)$.

Exercice 1.11 — L'algorithme de Gauss de résolution d'un système linéaire produit de nouvelles équations à partir de combinaisons linéaires des équations initiales.

(i) Peut-on obtenir l'équation $3x - 2y = 5$ par application de l'algorithme de Gauss aux équations du système suivant?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

(ii) Peut-on obtenir l'équation $5x - 3y = 2$ par application de l'algorithme de Gauss aux équations du système suivant?

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

(iii) Peut-on obtenir l'équation $6x - 9y + 5z = -2$ par application de l'algorithme de Gauss aux équations du système suivant?

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 6x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

Exercice 1.12 — Soient a, b, c, d et e des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Supposons que les deux équations linéaires

$$ax + by = c \qquad \text{et} \qquad ax + dy = e$$

admettent le même ensemble de solutions. Démontrer que ces équations sont les mêmes, c'est-à-dire $b = d$ et $c = e$. Que se passe-t-il avec $a = 0$?

Exercice 1.13 — Soit $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Démontrer que, si $ad - bc \neq 0$, alors le système

$$\begin{cases} ax + by & = k \\ & cx + dy = \ell \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exercice 1.14 — Soit $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Chaque équation du système

$$\begin{cases} ax + by & = c \\ dx + ey & = f \end{cases}$$

décrit géométriquement une droite dans le plan (muni de coordonnées x, y). Comment traduire géométriquement le fait que l'ensemble des solutions de ce système soit vide? un singleton? infini?

Exercice 1.15 — Existe-t-il un système linéaire à deux variables dont l'ensemble des solutions soit tout $\mathbf{R}^2$?

Exercice 1.16 — Démontrer que chaque opération élémentaire utilisée dans l'algorithme de Gauss est réversible, c'est-à-dire : si deux systèmes linéaires sont liés par une opération élémentaire (sur les lignes) $S_1 \to S_2$, alors il existe une opération élémentaire $S_2 \to S_1$.

Exercice 1.17 — Certaines opérations utilisées dans l'algorithme de Gauss sont-elles redondantes? Autrement dit : peut-on les remplacer par l'application successive d'autres opérations?

Exercice 1.18 — Une boîte contient des pièces de 1, 2 et 5 centimes. Il y a treize pièces, pour une valeur totale de 65 centimes. Combien y a-t-il de pièce de chaque valeur?

Exercice 1.19 — On sait qu'un un livre de comptes a été crypté en remplaçant chaque chiffre de 0 à 9 par une lettre de l'alphabet (à des chiffres différents correspondent des lettres différentes). On repère une addition, qui s'écrit

$$AHAHA + TEHE = TEHAW.$$

Déterminer les chiffres correspondant aux lettres A, E, H, T et W, en vérifiant qu'il s'agit de l'unique possibilité.

2. Description des solutions d'un système linéaire

Exercice 2.1 — Déterminer la taille de chacune des matrices suivantes :

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.2 — Effectuer les opérations suivantes sur les vecteurs, si elles sont définies :

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (b)\ 5\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (d)\ 7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (f)\ 6\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3 — Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la notation matricielle.

$$(a)\ \begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} 2a + b - c = 2 \\ 2a + c = 3 \\ a - b = 0 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ w + 2x + y = 4 \\ w + x - y + z = 1 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} w + x + z = 4 \\ -w + 2x + y = 2 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$$

Exercice 2.4 — Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la notation matricielle. Donner chaque ensemble de solutions sous forme vectorielle.

$$(a)\ \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x - z = 1 \\ -w + y + 2z = 3 \\ -w + x + 2y + 3z = 7 \end{cases}, \qquad (c)\ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ w + y = 0 \\ w + 3x - 2y + 3z = 0 \\ -w - y = 0 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} a + 2b + 3c + d - e = 1 \\ 3a - b + c + d + e = 3 \end{cases}$$

Exercice 2.5 — Résoudre chacun des systèmes en utilisant la notation matricielle. Exprimer les solutions sous forme vectorielle.

$$(a)\ \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - \ \ y + z = 2 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} x + \ \ y - 2z = 0 \\ x - \ \ y \qquad = -3 \\ 3x - \ \ y - 2z = -6 \\ 2y - 2z = 3 \end{cases}, \qquad (c)\ \begin{cases} w + 2x - y - z = 4 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y \qquad = -3 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.6 — Démontrer dans chaque cas que le vecteur v appartient à l'ensemble S.

(i) $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{Q} \right\}$

(ii) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$

(iii) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbf{R} \right\}$

Exercice 2.7 — Dans chaque cas, déterminer si le vecteur v appartient à l'ensemble S.

(i) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ k \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{R} \right\}$

(ii) $v = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{Q} \right\}$

(iii) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbf{R} \right\}$

(iv) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = \left\{ j \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid j, k \in \mathbf{R} \right\}$

Exercice 2.8 — Paramétrer les solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

dans $\mathbf{R}^n$.

Exercice 2.9 — (i) Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$. Résoudre le système d'inconnues x, y, z et w

$$\begin{cases} -w + \ \ x + 2y \qquad = a \\ \qquad 2x \qquad + z = b \\ 2w + \ \ x + \ \ y \qquad = c \end{cases}$$

en fonction de a, b et c.

(ii) En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} -w + \ \ x + 2y \qquad = 3 \\ \qquad 2x \qquad + z = 1 \\ 2w + \ \ x + \ \ y \qquad = 2 \end{cases}$$

Exercice 2.10 — Écrire la matrice 4×4 dont le coefficient d'indices i, j est

$$(a)\ i+j \qquad (b)(-1)^{i+j}.$$

Exercice 2.11 — (i) Déterminer tous les polynômes $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 6$.

(i) Déterminer tous les polynômes $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$.

Exercice 2.12 — Considérons cinq points $P_1, \ldots, P_5$ dans le plan $\mathbf{R}^2$. Démontrer qu'il existe toujours une *conique* les contenant, c'est-à-dire une courbe définie par une équation de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, où a, b, c, d, e et f sont des nombres réels non tous nuls.

Exercice 2.13 — Soit $a \in \mathbf{R}$. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} ax + y &= a^2 \\ x + ay &= 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a ce système n'a-t-il aucune solution? Pour quelles de valeurs de a en admet-il une infinité?

(ii) Mêmes questions avec le système

$$\begin{cases} ax + y &= a^3 \\ x + ay &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2.14 — Écrire un système linéaire à quatre inconnues et quatre équations dont l'ensemble des solutions

(i) dépend d'un seul paramètre ;

(ii) dépend de deux paramètres ;

(iii) dépend de trois paramètres.

Exercice 2.15 — Résoudre le système

$$\begin{cases} x + \ \ y - 2z = 0 \\ x - \ \ y \qquad = -3 \\ 3x - \ \ y - 2z = -6 \\ \qquad 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

puis résoudre le système homogène associé.

Exercice 2.16 — Résoudre chaque système. Écrire les solutions sous forme vectorielle, en identifiant à chaque fois une solution particulière et l'ensemble de solutions du système homogène associé.

$$(a)\ \begin{cases} 3x+6y=18 \\ x+2y=6 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} 2a+b-c=2 \\ 2a+c=3 \\ a-b=0 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} x+2y-z=3 \\ w+2x+y=4 \\ w+x-y+z=1 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} w+x+z=4 \\ -w+2x+y=2 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$$

Exercice 2.17 — Résoudre chaque système. Écrire les solutions sous forme vectorielle, en identifiant à chaque fois une solution particulière et l'ensemble de solutions du système homogène associé.

$$(a)\ \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x-y=3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} -z=1 \\ -w+y+2z=3 \\ -w+x+2y+3z=7 \end{cases} \qquad (c)\ (c)\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ w+y=0 \\ w+3x-2y+3z=0 \\ -w-y=0 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} a+2b+3c+d-e=1 \\ 3a-b+c+d+e=3 \end{cases}$$

Exercice 2.18 — Déterminer si chacune des matrices suivantes est régulière ou singulière.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.19 — Dans chaque cas, déterminer si le vecteur v est une combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble E.

(a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 2.20 — (i) Démontrer que si deux vecteurs $s, t \in \mathbf{R}^n$ sont solution d'un système linéaire homogène, alors il en est de même des vecteurs

$$(a)\ s+t, \qquad (b)\ 3s, \qquad (c)\ ks+mt,\ \text{avec } k,m \in \mathbf{R}.$$

(ii) Pourquoi l'assertion suivante est-elle fausse?

Les trois propriétés (a), (b) et (c) ci-dessus prouvent que, si un système linéaire homogène admet une solution, alors il en admet une infinité : en effet, tout multiple d'une solution est encore une solution, de même que la somme de deux solutions.

Exercice 2.21 — Considérons un système linéaire à n inconnues dont toutes les équations sont à coefficients et constantes rationnels (c'est-à-dire dans le corps $\mathbf{Q}$). Démontrer que s'il admet une solution (resp. une infinité de soutions) dans $\mathbf{R}^n$, alors il en admet une (resp. une infinité) à coefficients rationnels (c'est-à-dire dans $\mathbf{Q}^n$).

3. La réduction de Gauss-Jordan

Exercice 3.1 — Appliquer la réduction de Gauss-Jordan à chacun des systèmes suivants et en déduire ses solutions.

$$(a)\ \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x+2y = 1 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x+y=1/2 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 2x-y = -1 \\ x+3y-z=5 \\ y+2z=5 \end{cases}$$

Exercice 3.2 — Appliquer la réduction de Gauss-Jordan à chacun des systèmes suivants.

$$(a)\ \begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-y+z=1 \\ 4x+y+5z=1 \end{cases}$$

Exercice 3.3 — Déterminer la forme échelonnée réduite (selon les lignes) de chacune des matrices suivantes.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (d)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.4 — Déterminer la forme échelonnée réduite (selon les lignes) de chacune des matrices suivantes :

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.5 — Déterminer un paramétrage des solutions de chacun des systèmes linéaires grâce à la réduction de Gauss-Jordan.

$$(a)\ \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x-y =3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x - z = 1 \\ -w + y+2z=3 \\ -w+x+2y+3z=7 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ w +y =0 \\ w+3x-2y+3z=0 \\ -w -y =0 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} a+2b+3c+d-e=1 \\ 3a-b+c+d+e=3 \end{cases}$$

Exercice 3.6 — Donner deux matrices échelonnées distinctes déduites de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

en appliquant l'algorithme de Gauss.

Exercice 3.7 — Expliciter toutes les matrices échelonnées réduites de taille

(a) 2×2 (b) 2×3 (c) 3×2 (d) 3×3

Exercice 3.8 — Quelle matrice échelonnée réduite déduit-on d'une matrice régulière?

Exercice 3.9 — Pourquoi l'opération consistant à remplacer la ligne L_1 d'une matrice par $L_1+(-1)\cdot L_1$ n'est-elle pas réversible?

Exercice 3.10 — Déterminer si les deux matrices données sont équivalentes par les lignes.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.11 — Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont-elles équivalentes par les lignes?

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d)\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.12 — Pour chacune des matrices suivantes, donner trois autres matrices qui lui sont équivalentes par les lignes.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.13 — Appliquer la réduction de Gauss-Jordan à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

puis exprimer chacune des lignes de la matrice échelonnée réduite obtenue comme une combinaison linéaire des lignes de la matrice initiale.

Exercice 3.14 — Décrire toutes les matrices équivalentes par les lignes à la matrice suivante.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.15 — Exhiber deux matrices échelonnées réduites dont tous les coefficients dominants sont aux mêmes positions, mais qui ne sont pas équivalentes par les lignes.

Exercice 3.16 — Démontrer que deux matrices régulières de même taille sont toujours équivalentes par les lignes. Ceci reste-t-il vrai pour deux matrices singulières?

Exercice 3.17 — Soient $v_0, \ldots, v_m$ des vecteurs dans $\mathbf{R}^n$. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) le vecteur v_0 est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_m$;

(ii) il existe une relation linéaire de la forme

$$a_0 v_0 + \ldots + a_m v_m = 0$$

avec $a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{R}$ *et* $a_0 \neq 0$.

Exercice 3.18 — Dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

la troisième colonne est la somme des deux premières.

(i) Démontrer que cette propriété est préservée par toutes les opérations élémentaires sur les lignes.

(ii) En déduire sans calcul la forme échelonnée réduite de cette matrice.

(iii) Vérifier la réponse par le calcul.