Université Lyon 1**, Fondamentaux des mathématiques** 2 **Partie** A
Année Universitaire $2021 - 2022$

Espaces vectoriels

Exercice 1 — Soit W l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $xy \geqslant 0$.

1. Dessiner W.
2. Pour $u \in W$ et $c \in \mathbf{R}$, a-t-on $cu \in W$?
3. Exhiber deux vecteurs u, v dans W tels que $u + v \notin W$. Que peut-on en déduire au sujet de W?

Exercice 2 — Soit H l'ensemble des vecteurs (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1. Dessiner H.
2. Démontrer que H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 3 — Soit $m, n, p \geqslant 1$ des nombres entiers. Soit $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ une matrice fixée. Démontrer que l'ensemble H des matrices $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

Exercice 4 — Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}^4$ de la forme

$$\begin{pmatrix} s + 3t \\ s - t \\ 2s - t \\ 4t \end{pmatrix}$$

avec $s, t \in \mathbf{R}$. Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et expliciter une famille génératrice.

Exercice 5 — Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et soit a, b, c trois fonctions réelles continues sur I.

Démontrer que l'ensemble des fonctions y deux fois dérivables sur I telles que

$$ay'' + by' + c = 0$$

est un espace vectoriel.

Exercice 6 — Soit $\mathbf{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes en une variable à coefficients réels.

1. Démontrer que l'ensemble $\mathbf{R}[X]_3$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.
2. Démontrer que $\mathbf{R}[X]_3$ est engendré par les quatre polynômes $1, X, X(X-1)$ et $X(X-1)(X-2)$.

Exercice 7 — Soit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } w' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur w appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3? Même question pour le vecteur w'.

Exercice 8 — Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, déterminer :

- si elle est libre ou liée ;
- si elle engendre ou non $\mathbf{R}^3$;
- le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ qu'elle engendre.

(a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 — Considérons dans $\mathbf{R}^4$ les cinq vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Chercher les relations de dépendance linéaire entre ces vecteurs, puis extraire de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une famille libre engendrant le même sous-espace vectoriel.

Exercice 10 — Soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Démontrer que l'on a $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(w, z)$.

Exercice 11 — Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}, \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = z + t\}$$

et

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = y = z = t\}.$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$, puis donner une famille génératrice minimale de chacun d'eux.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F + G$, $F + H$, $F \cap G$ et $F \cap H$.

Exercice 12 — Soit $E = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a + 2b - 3c = 0\}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $F = \mathrm{Vect}(a)$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et donner une famille génératrice minimale.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $E + F$ et $E \cap F$.

Exercice 13 — Déterminer une famille génératrice du noyau de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$