Université Lyon 1, Fondamentaux des mathématiques II - Partie A

Année Universitaire 2021 – 2022

Contrôle continu 2 (60 minutes)

Vendredi 5 novembre 2021

Documents, notes de cours, calculatrices et téléphones sont interdits.

Exercice 1 —

1. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $\left(A \mid I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Les opérations élémentaires effectuées sont, successivement,

$$L_2 \leftarrow L_2 - L1,\ \ L_3 \leftarrow L_3 - L1,\ \ L_3 \leftarrow L_3 - L2,\ \ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2,\ \ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3.$$

La matrice augmentée obtenue est $\left(I_3 \mid A'\right)$, donc la matrice A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En observant que la matrice B n'est autre que A^{-1}, il vient immédiatement

$$AB = AA^{-1} = I_3.$$

3. Pour tout vecteur $X \in \mathbf{R}^3$,

$$AX = 0 \Longleftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}0 \Longleftrightarrow (A^{-1}A)X = 0 \Longleftrightarrow I_nX = 0 \Longleftrightarrow X = 0.$$

L'équation $AX = 0$ admet donc le vecteur nul pour unique solution.

Exercice 2 —

1. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à chacune des deux matrices considérées :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(les opérations élémentaires effectuées sont, successivement,

$$L_1 \leftrightarrow L_2,\ \ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ \ L_3 \leftarrow L_3 + L_1,\ \ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)$$

et

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\2&4&0\\1&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(les opérations élémentaires effectuées sont, successivement,

$$L_1 \leftrightarrow L_3,\ \ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ \ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2,\ \ L_2 \leftarrow -L_2).$$

Les deux matrices échelonnées réduites obtenues étant les mêmes, les deux matrices initiales sont équivalentes par les lignes.

2. On passe de la matrice $\begin{pmatrix}2&4&1\\1&2&0\\-1&-2&3\end{pmatrix}$ à la matrice $\begin{pmatrix}0&0&2\\2&4&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ en utilisant successivement les opérations élémentaires transformant la première matrice en $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, puis les opérations élémentaires transformant cette dernière en la seconde matrice. Il s'agit donc des opérations élémentaires suivantes :

$$L_1 \leftrightarrow L_2,\ L_2 \leftarrow L_2{-}2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3{+}L_1,\ L_3 \leftarrow L_3{-}3L_2,\ L_2 \leftarrow -L_2,\ L_3 \leftarrow L_3{-}2L_2,\ L_2 \leftarrow L_2{+}2L_1,\ L_1 \leftrightarrow L_3.$$

Exercice 3 —

1. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cc|cc}2&-3&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)$.

Il vient :

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&-3&1&0\\3&-4&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}2&-3&1&0\\1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&-1&1\\2&-3&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&-1&1\\0&-1&3&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-4&3\\0&1&-3&2\end{array}\right)$$

La matrice $A = \begin{pmatrix}2&-3\\3&-4\end{pmatrix}$ est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix}-4&3\\-3&2\end{pmatrix}$.

2. Posons $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$. Le système linéaire considéré s'écrit $AX = B$ sous forme matricielle. La matrice A étant inversible, cette équation est équivalente à

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix}-4b_1+3b_2\\-3b_1+2b_2\end{pmatrix},$$

donc le système linéaire considéré admet pour unique solution le vecteur

$$\begin{pmatrix}-4b_1+3b_2\\-3b_1+2b_2\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 — Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbf{R})$,

$$(I_n + A)(I_n - A + A^2) = (I_n - A + A^2) + (A - A^2 + A^3) = I_n + A^3.$$

Si $A^3 = 0$, alors

$$(I_n + A)(I_n - A + A^2) = I_n$$

et la matrice $I_n + A$ est donc inversible, d'inverse

$$I_n - A + A^2.$$