Université Lyon 1, Fondamentaux des mathématiques II - Partie A

Année Universitaire 2021 – 2022

Contrôle continu 2 (60 minutes)

Vendredi 5 novembre 2021

Documents, notes de cours, calculatrices et téléphones sont interdits.

Exercice 1 — Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle inversible? Si oui, quelle est la matrice A^{-1}?
2. Calculer AB, avec
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer tous les vecteurs $X \in \mathbf{R}^3$ tels que $AX = 0$.

Exercice 2 — 1. Les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles équivalentes par les lignes?

2. Si la réponse à la question précédente est positive, décrire les opérations élémentaires successives permettant de passer de la première matrice à la seconde.

Exercice 3 — 1. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Soit $(b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$. Déduire de la question précédente que le système linéaire
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = b_1 \\ 3x_1 - 4x_2 = b_2 \end{cases}$$
admet une unique solution dans $\mathbf{R}^2$, que l'on exprimera en fonction de b_1 et b_2.

Exercice 4 — Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels telle que $A^3 = 0$.

Démontrer que la matrice $I_n + A$ est inversible, et que son inverse est la matrice $I_n - A + A^2$.