Université Lyon 1**, Fondamentaux des mathématiques II - Partie A**

Année Universitaire 2021 – 2022

Contrôle continu 1 (45 minutes)

Jeudi 7 octobre 2021

Documents, notes de cours, calculatrices et téléphones sont interdits.

Exercice 1 — Appliquons l'algorithme de Gauss pour échelonner la matrice augmentée du système (S) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right).$$

Il est judicieux de remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ pour faire apparaître un 1 dans la première colonne, puis d'échanger les deux première ligne pour que ce 1 se retrouve sur la première ligne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right).$$

On peut maintenant annuler tous les coefficients de la première colonne sous ce 1 en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et $L_1 \leftarrow L_4 - 11L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & 11 \end{array}\right).$$

On annule ensuite le coefficient en bas de la deuxième colonne par $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -9 \end{array}\right).$$

On termine en annulant le coefficient en bas de la troisième colonne par $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cette matrice augmentée correspond au système

$$(\mathrm{S}') \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

dans lequel les variables x_1, x_2, x_3 sont dominantes et x_4 est libre. On le résoud en exprimant de proche en proche x_3, x_2 et x_1 en fonction de x_4 :

$$x_3 = -3 - 2x_4, \quad x_2 = -4 - 2x_3 - x_4 = -4 - 2(-3 - 2x_4) - x_4 = 2 + 3x_4$$

et

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -(2 + 3x_4) - (-3 - 2x_4) = 1 - x_4.$$

Au final, nous avons obtenu :

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S') = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice 2 — Nous cherchons le polynôme sous la forme $P(T) = aT^2 + bT + c$, avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. On a $P'(T) = 2aT + bT$.

Les conditions demandées se traduisent par le système linéaire

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 2a + b \phantom{{}+c} = 2 \end{cases}$$

On résoud ce système en échelonnant sa matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

par l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ce système admet donc une unique solution :

$$c = 1, b = -2c = -2 \text{ et } a = 1 - b - c = 2.$$

Il existe donc un unique polynôme de degré 2 satisfaisant aux conditions désirées, à savoir le polynôme

$$P(T) = 2T^2 - 2T + 1.$$

Exercice 3 — Il s'agit de savoir s'il existe des nombres réels a_1, a_2 et a_3 tels que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3,$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} 4a_1 - 3a_2 + a_3 = -3 \\ 5a_1 - 2a_2 + 5a_3 = -4 \\ -6a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 1 \end{cases}$$

On le résoud en échelonnant sa matrice augmentée par l'algorithme de Gauss (les opérations sont implicites):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & -4 \\ -6 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & -4 \\ -6 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & -15 & 1 \\ 0 & 8 & 21 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & -7 & -15 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & -7 & -15 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \end{array}\right)$$

Ce système admet une unique solution

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc

$$v = v_1 + 2v_2 - v_3.$$

Exercice 4 — Commençons à échelonner le système (S) :

$$(\mathrm{S}) \longrightarrow \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ (a-2)y + (b+2)z - t = 0 \\ (c-3)y + (d+3)z - 2t = 1 \end{cases}$$

(a) Si $a = 2, b = -2, c = 3$ et $d = -3$, alors le système obtenu contient les équations incompatibles $t = 0$ et $-2t = 1$, donc (S) n'a pas de solution.

(b) Si $a = 2, c = 3, d = -3$ et $b \neq -2$, alors le système obtenu est échelonné avec trois variables dominantes x, z, t et une variable libre y, donc l'ensemble des solutions de (S) est alors infini et décrit par un paramètre (qui correspond à la variable libre y).