Université Lyon 1, Fondamentaux des mathématiques II - Partie A

Année Universitaire 2021 – 2022

Bases, dimension

Exercice 1 — 1. Démontrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbf{R}^3$.

2. Reprendre les questions 1 et 2 avec les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 2 — Étudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes, et donner à chaque fois une base du sous-espace engendré.

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$
2. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$.
3. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^5$
4. $\begin{pmatrix}2\\4\\3\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\3\\6\\2\end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^6$
5. $\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\2\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\0\\4\\-1\\7\end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^6$.

Exercice 3 — Dans $\mathbf{R}^4$, considérons les familles de vecteurs suivantes :

(i) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$.

(ii) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}3\\4\\5\\16\end{pmatrix}$. (iii) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\11\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}3\\4\\5\\14\end{pmatrix}$.

1. Ces vecteurs forment-ils une famille libre? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$. Si non, donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.

2. Ces vecteurs forment-ils une famille génératrice? Si oui, en extraire au moins une base de $\mathbf{R}^4$. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 4 — Soit $E = \mathbf{R}[X]_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Démontrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ forme une base de E

2. Déterminer les coordonnée du polynôme $F = 8X^3 - X^2 + 3X$ dans la base $(1, X-1, X^2 - X, X^3 - X^2)$, puis dans la base $(1, X+1, X^2+X+1, X^3+X^2+X+1)$.

Exercice 5 — Soit $a \in \mathbf{R}$. On pose $A_p(X) = (X-a)^p$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que $\{A_0, \ldots, A_n\}$ est une base de $\mathbf{R}[X]_n$.

2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]_n$. Démontrer que l'on peut écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$$

(*Indication* : on pourra démontrer que l'ensemble E des éléments de $\mathbf{R}[X]_n$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]_n$ et qu'il contient une base de $\mathbf{R}[X]_n$.)

Exercice 6 — Déterminer une base du sous-espace vectoriel suivant de $\mathbf{R}^3$

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } x - y + z = 0\right\}.$$

Exercice 7 — Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension de F?

2. Dˆemontrer que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à F tandis que le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F.

3. Calculer les coordonnées du vecteur $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2).

4. Déterminer une équation en x, y, z exprimant que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à F.

Exercice 8 — Considérons les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\6\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\4\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_5 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

dans $\mathbf{R}^4$. Posons $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels

$$F, \ G, \ F \cap G \ \text{et} \ F + G.$$

Exercice 9 — Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par trois les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Déterminer la dimension de E_a en fonction de la valeur de a.

Exercice 10 — Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geq 0).$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
3. Démontrer que l'application
$$\mathcal{E} \to \mathbf{R}^2, \qquad (u_n) \mapsto (u_0, u_1)$$
est linéaire et bijective. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
4. Expliciter la suite (u_n) dans $\mathcal{E}$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 11 — Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tels que $P(-1) = P(1) = 0$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.
2. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice 12 — Soit $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset \mathbf{R}^3$ avec

$$v_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} \ \text{et} \ v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\{v_1, v_2\}$ est une base de E.
2. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.

3. Compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 13 — Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer les dimensions des sous-espaces $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 — Considérons les familles de fonctions

$$\mathcal{B} = \{1, \cos(t), \cos(2t), \ldots, \cos(6t)\} \text{ et } \mathcal{C} = \{1, \cos(t), \cos(t)^2, \ldots, \cos(t)^6\}.$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{C}$ est libre.

   Indication : écrire une combinaison linéaire

   $$c_1 \cos(t) + c_2 \cos(t)^2 + \ldots + c_6 \cos(t)^6 = 0$$

   et considérer plusieurs valeurs de t afin d'obtenir suffisamment d'équations en $c_1, \ldots, c_6$ pour en déduire $c_1 = c_2 = \ldots = c_6 = 0$.

2. Soit H le sous-espace des fonctions engendré par la famille $\mathcal{C}$. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de H.

On pourra utiliser les identités trigonométriques suivantes :

$$\cos(2t) = -1 + 2\cos(t)^2, \;\; \cos(3t) = -3\cos(t) + 4\cos(t)^3, \;\; \cos(4t) = 1 - 8\cos(t)^2 + 8\cos(t)^4,$$

$$\cos(5t) = 5 - 20\cos(t)^3 + 16\cos(t)^5 \text{ et } \cos(6t) = 1 + 18\cos(t)^2 - 48\cos(t)^4 + 32\cos(t)^6.$$

Exercice 15 — Soit $H = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbf{R}^4$, avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de H.
2. Démontrer que le vecteur

   $$v = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   appartient à H et déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 16 — Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E.

1. $E = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $E = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ et $v = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
4. Dans chacun des cas précédents, déterminer la matrice P transformant les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique en ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice Q transformant les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ en ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$.

Exercice 17 — Soit E un espace vectoriel (de dimension finie) et soit F et G deux sous-espaces vectoriels distincts de E. On considère une base $(u_1, \dots, u_n)$ de F et une base $(v_1, \dots, v_m)$ de G.

1. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) la famille $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ est libre ;

   (ii) $F \cap G = \{0\}$.

2. Suposons dim $(E) = 6$ et $\dim(F) = \dim(G) = 4$. Quelles sont les possibilités pour les dimensions de $F + G$ et de $F \cap G$?