Feuille 5 : Nombres complexes (correction)

Exercice 5-1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 + 5i$, b) $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, c) $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,

d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, e) $z = \dfrac{4 - 3i}{5 + 2i}$, f) $z = \dfrac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,

g) $z = \dfrac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$.

Correction exercice 5-1.

a) $\mathrm{Re}(z) = 4, \mathrm{Im}(z) = 5$, b) $\mathrm{Re}(z) = 3, \mathrm{Im}(z) = 5$, c) $\mathrm{Re}(z) = -17, \mathrm{Im}(z) = -1$,

d) $\mathrm{Re}(z) = 79, \mathrm{Im}(z) = 27$, e) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{14}{29}, \mathrm{Im}(z) = -\dfrac{23}{29}$, f) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{19}{58}, \mathrm{Im}(z) = -\dfrac{83}{58}$,

g) $\mathrm{Re}(z) = -6, \mathrm{Im}(z) = -5$.

Exercice 5-2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$ pour $m \in \mathbb{R}$.

Correction exercice 5-2.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)} = \frac{(1 + im)(2m - i(m^2 - 1))}{(2m)^2 + (m^2 - 1)^2} = \frac{2m + m(m^2 - 1) + 2im^2 - i(m^2 - 1)}{m^4 + 2m^2 + 1} \\ &= \frac{m^3 + m + i(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} = \frac{m(m^2 + 1) + i(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} \\ &= \frac{m + i}{m^2 + 1}, \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{m}{m^2 + 1}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{m^2 + 1}$.

Exercice 5-3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$:

a) $z + 1$, b) $z^2 + 3i$, c) $\bar{z} + 2z$, d) $\bar{z} + z - i$,

e) $z^3 + 1$, f) $iz^2 - 3\bar{z}$, g) $z - \bar{z} + iz$, h) $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Correction exercice 5-3. Pour simplifier, notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

a) $\overline{z + 1} = x + 1 - iy$, b) $\overline{z^2 + 3i} = x^2 + y^2 - i(2xy + 3)$,

c) $\overline{\bar{z} + 2z} = 3x - 2iy$, d) $\overline{\bar{z} + z - i} = 2x + i$,

e) $\overline{z^3 + 1} = x^3 - 3y^2x + 1 + i(y^3 - 3x^2y)$, f) $\overline{iz^2 - 3\bar{z}} = -2xy - 3x + i(y^2 - x^2 - 3y)$,

g) $\overline{z - \bar{z} + iz} = -y + i(x + 2y)$, h) $\overline{z^2 - i\bar{z} + 4} = x^2 - y^2 - y + 4 + i(x - 2xy)$.

Exercice 5-4.

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

   a) $z = 2 + 5i$, b) $z = -3 + 2i$, c) $z = (3 - 2i)(9 + i)$, d) $z = \dfrac{2 + 5i}{5 - 2i}$.

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

   a) $z\bar{z}$, b) $2z^2$, c) $\dfrac{2}{\bar{z}}$, d) $3\dfrac{\bar{z}^2}{z}$.

Correction exercice 5-4.

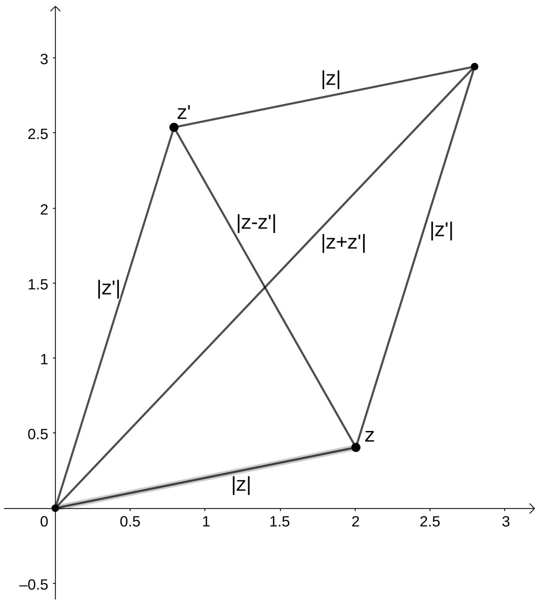
1.
   a) $|z| = \sqrt{29}$, b) $|z| = \sqrt{13}$, c) $|z| = \sqrt{1066}$, d) $|z| = 1$.

2.
   a) $|z\bar{z}| = |z||\bar{z}| = |z|^2$, b) $|2z^2| = 2|z|^2$, c) $\left|\frac{2}{\bar{z}}\right| = \frac{2}{|z|}$, d) $\left|3\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = 3|z|$.

Exercice 5-5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Établir la relation $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ et en donner une interprétation géométrique.

Correction exercice 5-5.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 + |z - z'|^2 &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') + (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') \\ &= |z|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' + |z'|^2 + |z|^2 - z\bar{z}' - \bar{z}z' + |z'|^2 \\ &= 2(|z|^2 + |z'|^2). \end{aligned}$$

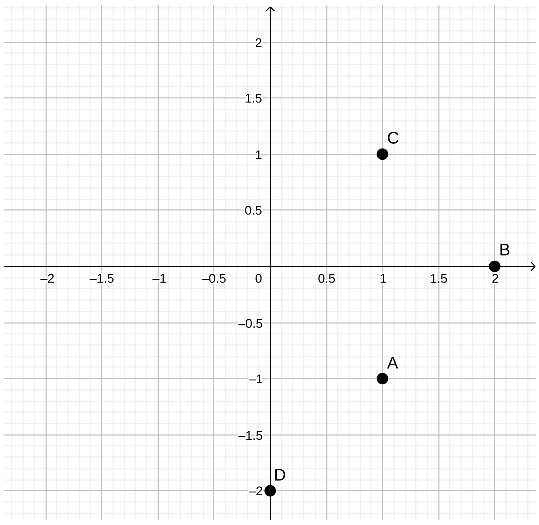


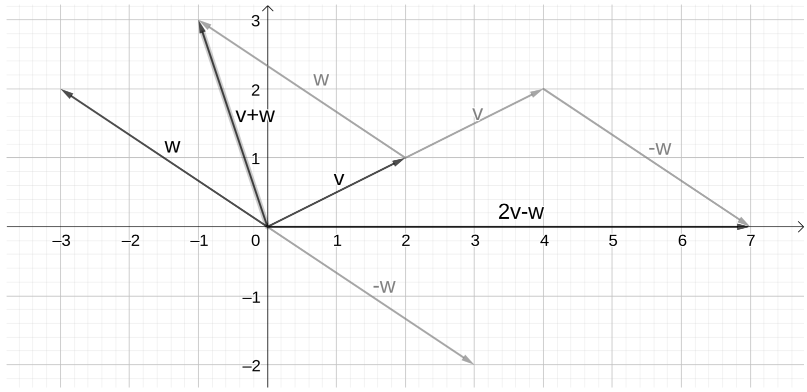
On appelle cette égalité l'identité du parallélogramme : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.

Exercice 5-6.

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
   a) $z = 1 - i$, b) $\bar{z}$, c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.
2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
   a) $\overrightarrow{v}$ d'affixe $2 + i$, b) $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-3 + 2i$, c) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, d) $2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.

Correction exercice 5-6. On note A, B, C et D les points d'affixes respectives z, $\bar{z}$, $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.





Exercice 5-7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a) $|1-z| \leq \dfrac{1}{2}$ b) $\operatorname{Re}(1-z) \leq \dfrac{1}{2}$ c) $\operatorname{Re}(iz) \leq \dfrac{1}{2}$ d) $\left|1-\dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$ e) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$

Correction exercice 5-7.

a) L'ensemble des points d'affixe $x \in \mathbb{C}$ tels que $|1-z| \leq \dfrac{1}{2}$ est le cercle de centre Ω d'affixe 1 et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

b) Notons $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors, $1 - z = 1 - x - iy$ et

$$\operatorname{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe à droite de la droite verticale $x = \dfrac{1}{2}$.

c) Notons $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors $iz = -y + ix$. et

$$\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe au-dessus de la droite horizontale $y = -\dfrac{1}{2}$.

d) Notons $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2(x^2+y^2)\\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + 2x + y^2 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 - 1 + y^2\\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est le cercle de centre de coordonnées $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

e) Notons $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2 < 4 \Leftrightarrow |z-3|^2 < 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 < 4((x+3)^2 + y^2)\\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2\\ \Leftrightarrow 0 < 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 + 10x + 9 + y^2\\ \Leftrightarrow 0 < (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 < (x+5)^2 + y^2.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'extérieur du disque de centre de coordonnées $(-5, 0)$ et de rayon 4.

Exercice 5-8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Correction exercice 5-8. Egalités à connaître :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x) \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

1. On a

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) &= e^{i(3x)} = e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :
$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$ et $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$.
On réécrit cela en

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x), \\ \sin(3x) &= 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

2.

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{16}$$

On utilise la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^4 = (a + (-b))^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k (-b)^{4-k} \\ &= \binom{4}{0}(-b)^4 + \binom{4}{1}a(-b)^3 + \binom{4}{2}a^2(-b)^2 + \binom{4}{3}a^3(-b) + \binom{4}{4}a^4 \\ &= b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4a^3b + a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{16} = \frac{e^{-4ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + e^{4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{-4ix} - 4e^{-2ix} + 6 - 4e^{2ix} + e^{4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6}{16} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin^4(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{-4ix}-4e^{-2ix}+6-4e^{2ix}+e^{4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{-3ix}+e^{-5ix}-4e^{-ix}-4e^{-3ix}+6e^{ix}+6e^{-ix}-4e^{3ix}-4e^{ix}+e^{5ix}+e^{3ix}}{32} \\
&= \frac{e^{5ix}+e^{-5ix}-3e^{3ix}-3e^{-3ix}+2e^{ix}+2e^{-ix}}{32} \\
&= \frac{e^{5ix}+e^{-5ix}-3(e^{3ix}+e^{-3ix})+2(e^{ix}+e^{-ix})}{32} \\
&= \frac{2\cos(5x)-6\cos(3x)+4\cos(x)}{32} = \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{3}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x).
\end{aligned}$$

Exercice 5-9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Correction exercice 5-9.

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}.$$

D'après la formule de Moivre, $e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k$, donc

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k.$$

Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $e^{i\theta} = 1$ et $U_n + iV_n = n+1$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient $U_n = n+1$ et $V_n = 0$.

Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$ donc

$$U_n + iV_n = \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} = \frac{1-e^{(n+1)i\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

À partir de là, deux solutions : dans la solution calculatoire, on multiplie par le conjugué du dénominateur

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{(1-e^{i(n+1)\theta})(1-e^{-i\theta})}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} = \frac{1-e^{-i\theta}-e^{(n+1)i\theta}+e^{ni\theta}}{1-e^{i\theta}-e^{-i\theta}+1} \\
&= \frac{1-\cos(\theta)+i\sin(\theta)-\cos((n+1)\theta)-i\sin((n+1)\theta)+\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{2-2\cos(\theta)} \\
&= \frac{1-\cos(\theta)-\cos((n+1)\theta)+\cos(n\theta)+i(\sin(\theta)-\sin((n+1)\theta)+\sin(n\theta))}{2-2\cos(\theta)}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$U_n = \frac{1-\cos(\theta)-\cos((n+1)\theta)+\cos(n\theta)}{2-2\cos(\theta)} \text{ et } V_n = \frac{\sin(\theta)-\sin((n+1)\theta)+\sin(n\theta)}{2-2\cos(\theta)}.$$

La deuxième solution est plus astucieuse, en factorisant les exponentielles

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{2i\sin(-\frac{n+1}{2}\theta)}{2i\sin(-\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\
&= \left(\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\
&= \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} + i\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$U_n = \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \text{ et } V_n = \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Exercice 5-10.

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

   a) $u = -3$, b) $v = 1 - i$, c) $w = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, d) $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

2. En déduire le module et un argument de uw et $\dfrac{z}{v}$.

Correction exercice 5-10.

1.

a) $u = -3 = 3(-1 + 0i) = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{i\pi}$ donc $|u| = 3$, $\arg(u) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

b) $v = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $|v| = \sqrt{2}$, $\arg(v) \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Ici on a deviné. On va donner la méthode générale :

$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Posons $\theta := arg(v)$. On a

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{Re(v)}{|v|} \\ \sin\theta &= \dfrac{Im(v)}{|v|} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\theta \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

c) $w = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $|w| = 1$ et $\arg(w) \equiv \dfrac{\pi}{6}$ $\pmod{2\pi}$.

d) $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg z \equiv -\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

2. D'une part, $|uw| = |u||w| = 3$ et $\arg(uw) \equiv \arg(u) + \arg(w) \equiv \pi + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{7\pi}{6} \pmod{2\pi}$, et d'autre part, $\left|\dfrac{z}{v}\right| = \dfrac{|z|}{|v|} = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z}{v}\right) \equiv \arg(z) - \arg(v) \equiv -\dfrac{\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

Exercice 5-11. Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, déterminer le module et un argument de z^2 et écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire une expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Correction exercice 5-11.

1. $z^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 + 2i\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2i\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} - (2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 2i\left(2^2 - \sqrt{3}^2\right) = 2\sqrt{3} + 2i$. On a alors $z^2 = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $|z^2| = 4$ et $\arg(z^2) \equiv \dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

2. Pour le module, $|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{|z^2|} = 2$. Pour l'argument, $2\arg(z) \equiv \arg(z^2) \pmod{2\pi}$ donc $2\arg(z) = \arg(z^2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Ainsi $\arg(z) = \dfrac{1}{2}\arg(z^2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. C'est à dire $\arg(z) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{6} + k\pi = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   On peut aussi écrire : $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{12} \pmod{\pi}$.

3. En utilisant 2), on peut écrire $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
On a d'une part $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et d'autre, part par hypotèse, $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient
$$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ et } 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$
On en déduit :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 5-12.

1. Donner la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la formule de Moivre).
2. En déduire une expression très simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Correction exercice 5-12.

1. Tout d'abord la formule de Moivre dit :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$
Avec la notation d'Euler, la formule s'écrit :
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$
$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ici on a deviné la décomposition à faire.
2ème méthode : $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
Posons $\theta := arg(1+i)$. On a
$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{Re(1+i)}{|1+i|} \\ \sin\theta &= \dfrac{Im(1+i)}{|1+i|} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
Donc $\theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
On en déduit que $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Donc
$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2}^n(e^{i\frac{\pi}{4}})^n.$$
D'après la formule de Moivre, $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = e^{ni\frac{\pi}{4}}$, donc
$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{ni\frac{\pi}{4}}.$$
2. Comme $1 - i = \overline{1+i}$, on a $(1-i)^n = \left(\overline{1+i}\right)^n = \overline{(1+i)^n} = 2^{\frac{n}{2}}e^{-ni\frac{\pi}{4}}$. Donc
$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{ni\frac{\pi}{4}} + 2^{\frac{n}{2}}e^{-ni\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{ni\frac{\pi}{4}} + e^{-ni\frac{\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

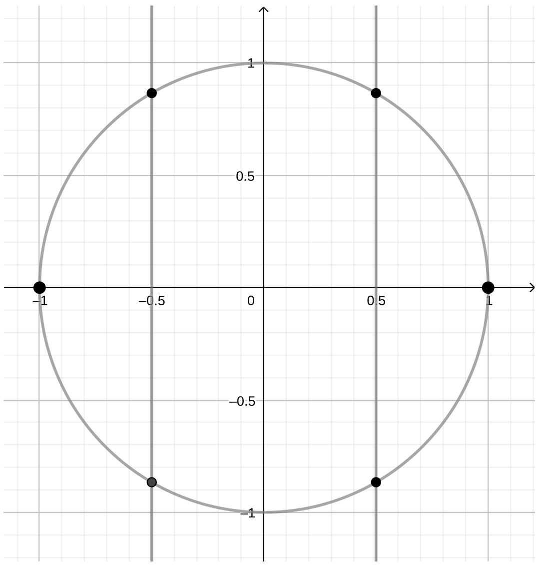
Exercice 5-13. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$. Ces nombres sont appelés les n racines n-ième de z.

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.

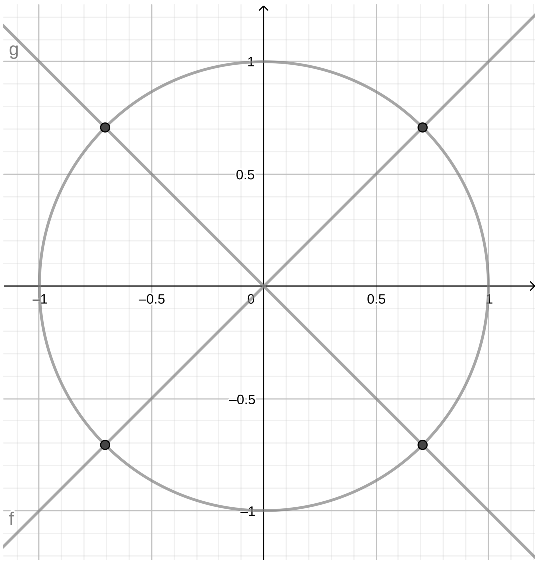
Correction exercice 5-13.

1. On doit résoudre $z^6 = 1$.
   Posons $\rho := |z|$ et $\theta := arg(z)$. Donc $z = \rho e^{i\theta}$ et $z^6 = \left(\rho e^{i\theta}\right)^6 = \rho^6 e^{6i\theta}$.
   $$z^6 = 1 \iff \rho^6 e^{6i\theta} = e^{0i} \iff \left\{\begin{array}{ll} \rho^6 & = 1 \\ 6\theta & = 0 + 2k\pi = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{2k\pi}{6} = \dfrac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. .$$
   Les racines 6-ièmes de 1 sont les $e^{ki\frac{\pi}{3}}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
   $z_0 = e^0 = 1$.
   $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $z_3 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.
   $z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{6\pi-\pi}{3}} = e^{i(2\pi-\frac{\pi}{3})} = e^{i(-\frac{\pi}{3})} = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   On place 1 et -1, et on place les quatre autres sur le cercle unité (vu que leur module est 1) ayant pour absisse $\dfrac{1}{2}$ ou $-\dfrac{1}{2}$.



   Pour trouver les racines 4-ièmes de -1, on va résoudre $z^4 = -1$.
   Posons $\rho := |z|$ et $\theta := arg(z)$. Donc $z = \rho e^{i\theta}$ et $z^4 = \left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = \rho^4 e^{4i\theta}$.
   $$z^4 = -1 \iff \rho^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi} \iff \left\{\begin{array}{ll} \rho^4 & = 1 \\ 4\theta & = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} = \dfrac{(1+2k)\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. .$$
   Les 4 racines sont les $e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:
   $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Ce sont les points d'intersection du cercle unité avec les diagonales du plan.



2. $z = 1$ n'est pas racine du polynôme complexe $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Les racines du polynôme complexe sont donc les racines n-ièmes de l'unité privées de 1.
On doit résoudre $z^n = 1$.
Posons $\rho := |z|$ et $\theta := arg(z)$. Donc $z = \rho e^{i\theta}$ et $z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{ni\theta}$.

$z^n = 1 \iff \rho^n e^{ni\theta} = e^{0i} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \rho^n & = 1 \\ n\theta & = 0 + 2k\pi = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{2k\pi}{n} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. .$

Les racines n-ièmes de l'unité sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$.
Notons que $z_n = e^{\frac{2in\pi}{n}} = e^{2i\pi} = 1$.
Donc les racines de $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$ sont les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Exercice 5-14.

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.
2. On note $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j.

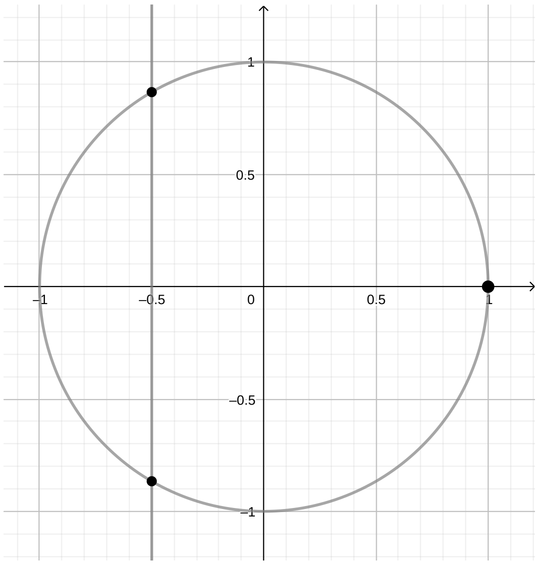
Correction exercice 5-14.

1. Pour trouver les racines cubiques de 1, on doit résoudre $z^3 = 1$. Il y a 2 façons de faire.
Méthode 1 : $z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \iff z = 1$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.
Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$.
$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.
Une racine carrée de Δ est $\delta := i\sqrt{3}$.
$z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.
$z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
Les racines cubiques de 1 sont donc : $1, \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Méthode 2 : On va utiliser l'écriture polaire c'est à dire trigonométrique.
La forme polaire de z est $z = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$, on doit déterminer ρ et θ.
$z^3 = 1 \iff (\rho e^{i\theta})^3 = 1 \iff \rho^3 e^{3i\theta} = e^{0i} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \rho^3 & = 1 \\ 3\theta & = 0 + 2k\pi = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$
Ainsi $z^3 = 1 \iff \left\{ \begin{array}{ll} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

On sait qu'on va avoir 3 solutions car l'équation est de degré 3. Donc les racines cubiques de 1 sont les $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$, autrement dit :

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



2. On note que $j = \omega_1$ est une des racines 3-ièmes de 1. Deux méthodes :
   — Comme $j \neq 1$, on a $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$ car $j^3 = 1$.
   — On calcule $j^2 = z_1^2 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = z_2$, donc $1 + j + j^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
3. Comme vu dans la deuxième méthode de la question précédente, $z_1 = j$ et $z_2 = j^2$ (et $1 = j^0$).

Exercice 5-15.

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :
   a) $z = 7 + 24i$, b) $z = 9 + 40i$, c) $z = 1 + i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$, b) $z^2 = 3 - 4i$.

Correction exercice 5-15.

1. On utilise la même méthode pour les trois questions :
   a) Soient a et b deux réels tels que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 7 + 24i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 7 && (L_1) \\ 2ab &= 24. && (L_2') \\ ab &= 12. && (L_2) \end{aligned} \tag{1}$$

   En identifiant les modules dans $(a + ib)^2 = 7 + 24i$, on a $|(a + ib)^2| = |7 + 24i|$. On obtient $\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{7^2 + 24^2}$, soit

$$a^2 + b^2 = \sqrt{625} = 25. \tag{L_3}$$

   En calculant $(L_1) + (L_3)$, on obtient $2a^2 = 32$, d'où $a = \pm 4$. En calculant $(L_3) - (L_1)$, on obtient $2b^2 = 18$, d'où $b = \pm 3$. De plus, (L_2) montre que a et b sont de même signe. On obtient donc que les deux racines de z sont $4 + 3i$ et $-4 - 3i$.

b) Soient a et b deux réels tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 9 + 40i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$a^2 - b^2 = 9 \qquad (L_1)$$
$$2ab = 40. \qquad (L_2')$$
$$ab = 20. \qquad (L_2)$$

En identifiant les modules dans $(a+ib)^2 = 9+40i$, on obtient $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{9^2+40^2}$, soit

$$a^2 + b^2 = \sqrt{1681} = 41. \qquad (L_3)$$

En résumé on a le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 9 \quad (L_1) \\ ab & = 20 \quad (L_2) \\ a^2 + b^2 & = 41 \quad (L_3) \end{cases}$$

En calculant $(L_1) + (L_3)$, on obtient $2a^2 = 50$, d'où $a = \pm 5$. Si $a = 5$ alors d'après (L_2), $b = 4$. Donc $5 + 4i$ est une racine carrée de $9 + 40i$, par suite l'autre racine carrée est son opposée c'est à dire $-5 - 4i$.

En conclusion, les deux racines carrées de $z = 9 + 40i$ sont $5 + 4i$ et $-5 - 4i$.

c) Soient a et b deux réels tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$a^2 - b^2 = 1 \qquad (L_1)$$
$$2ab = 1. \qquad (L_2)$$

En identifiant les modules dans $(a+ib)^2 = 1+i$, on obtient $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{1^2+1^2}$, soit

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}. \qquad (L_3)$$

En calculant $(L_1)+(L_3)$, on obtient $2a^2 = 1+\sqrt{2}$, d'où $a = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. En calculant $(L_3)-(L_1)$, on obtient $2b^2 = \sqrt{2} - 1$, d'où $b = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. De plus, (L_2) montre que a et b sont de même signe. On obtient donc que les deux racines de z sont

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

2. Pour ces deux questions, on pourrait utiliser la même méthode que précédemment, mais il y aura mieux sous réserve qu'à la fin on tombe sur un angle connu pour pouvoir donner son sinus et son cosinus :

a) Cette méthode est valable si on sait exprimer sous forme trigonométrique le complexe dont on cherche le carré. Dans ce cas, étant donné z^2, on a $|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{|z^2|}$ et $\arg(z^2) \equiv 2\arg(z) \pmod{2\pi}$ donc $\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Par suite $2\arg(z) = \arg(z^2) - 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, d'où $\arg(z) = \dfrac{\arg(z^2)}{2} - k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. On peut écrire $\arg(z) \equiv \dfrac{\arg(z^2)}{2} \pmod{\pi}$. Ici, on a

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4e^{\frac{5i\pi}{6}},$$

donc $z = \pm 2e^{\frac{5i\pi}{12}} = \pm 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$. On ne peut pas aller plus loin, finalement il valait mieux utiliser la méthode précédente.

b) Ici l'astuce est de faire apparaitre une identité remarquable

$$z^2 = 3 - 4i = 4 - 2\times 2i - 1 = 2^2 - 2\times 2i + i^2 = (2-i)^2.$$

Donc $z = \pm(2-i)$. Les solutions sont $2 - i$ et $-2 + i$.

Exercice 5-16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2 + (1-5i)z - 2 + 6i = 0$,

b) $(1+2i)z^2 - (9+3i)z + 10 - 5i = 0$,

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

d) $z^3 + 3z - 2i = 0$,

e) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$,

f) $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$

g) $z^5 - z = 0$,

h) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Correction exercice 5-16.

a) On a
$$\Delta = (1-5i)^2 - 4i(-2+6i) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i = -2i.$$
On obtient ses racines carrées en écrivant $-2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$. Donc une racine carrée de Δ est $\delta = 1 - i$.
Les racines de l'équation sont donc
$$z_1 = \frac{-(1-5i)-\delta}{2i} = \frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = -\frac{1}{i} + 3 = 3 + i,$$
$$z_2 = \frac{-(1-5i)+\delta}{2i} = \frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2.$$

b) On a
$$\Delta = (-(9+3i))^2 - 4(1+2i)(10-5i) = 81 + 54i - 9 - 40 + 20i - 80i - 40 = -8 - 6i.$$
On cherche $\delta^2 = \Delta$ de la forme $\delta = a + ib$ (a et b réels), c'est-à-dire $-8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $a^2 - b^2 = -8$ et $2ab = -6$. De plus $|\Delta| = |\delta|^2$, donc $a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$.
On a alors $2a^2 = (a^2+b^2) + (a^2-b^2) = -8 + 10 = 2$ donc $a = \pm 1$. Alors $b^2 = 10 - a^2 = 9$ donc $b = \pm 3$. Comme $2ab = -6 < 0$, a et b sont de signes opposés, donc $\delta = \pm(1-3i)$. On va choisir $\delta = 1 - 3i$.
On en déduit
$$z_1 = \frac{(9+3i)-(1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4-8i+3i+6}{5} = 2 - i,$$
$$z_2 = \frac{(9+3i)+(1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{1^2+5^2} = 1 - 2i.$$

c) Posons $Z = z^2$, l'équation devient $Z^2 + 10Z + 169 = 0$. Alors,
$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2\times 13)^2 = (10-26)(10+26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2.$$
On en déduit les deux solutions
$$Z_1 = \frac{-10+24i}{2} = -5 + 12i,$$
$$Z_2 = \frac{-10-24i}{2} = -5 - 12i.$$
On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = Z_1$ ce qui donne
$$a^2 - b^2 = -5$$
$$2ab = 12$$
$$a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$
Alors $2a^2 = a^2 + b^2 + a^2 - b^2 = 13 - 5 = 8$ donc $a = \pm 2$, et $b^2 = 13 - a^2 = 9$ donc $b = \pm 3$. Comme $ab > 0$, a et b sont de même signes donc on obtient deux solutions : $z_{1,1} = 2 + 3i$ et $z_{1,2} = -2 - 3i$.
On peut résoudre de la même manière $z^2 = Z_2$ et on trouverai $z_{2,1} = 2 - 3i$ et $z_{2,2} = -2 + 3i$. Au lieu de ça, on peut aussi remarquer que $z^4 + 10z^2 + 169$ est une équation à coefficients réels et donc que si z est solution, $\bar{z}$ l'est aussi. Par conséquent, les deux solutions manquantes (sur les quatre totales) sont bien $z_{2,1} = \overline{z_{1,1}} = 2 - 3i$ et $z_{2,2} = \overline{z_{1,2}} = -2 + 3i$.

d) On commence par chercher une solution simple, i en est une car $i^3+3i-2i=0$. On peut donc factoriser $z-i$ dans le polynôme $z^3+3z-2i$: on cherche a, b et c complexes tels que

$$z^3+3z-2i=(z-i)(az^2+bz+c) \Leftrightarrow z^3+3z-2i=az^3+(-iz+b)z^2+(-ib+c)z-ic$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -ia+b=0 \\ -ib+c=3 \\ -ic=-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=i \\ c=2 \end{cases}$$

Ainsi $z^3+3z-2i=(z-i)(z^2+iz+2)$. Le discriminant de z^2+iz+2 est $\Delta=i^2-4\times 2=-9=(3i)^2$. On choisit $\delta=3i$. Il y a donc deux racines $z_1=\dfrac{-i-3i}{2}=-2i$ et $z_2=\dfrac{-i+3i}{2}=i$. Ainsi, l'équation $z^3+3z-2i=0$ a deux solutions i et $-2i$.

e) Posons $Z=z^3$, l'équation devient $Z^2-(3+2i)Z+2+2i=0$. On a

$$\Delta=(3+2i)^2-4(2+2i)=9+12i-4-8-8i=-3+4i=-4+2\times 2i+1=(2i+1)^2.$$

Il y a deux solutions

$$Z_1=\frac{3+2i-(2i+1)}{2}=1,$$
$$Z_2=\frac{3+2i+(2i+1)}{2}=2+2i.$$

Il reste à résoudre $z^3=1$ et $z^3=2+2i$. Les solutions de $z^3=1$ sont les racines troisièmes de l'unité (Voir exercice 5-14), à savoir

$$1, e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour résoudre $z^3=2+2i$, commençons par mettre $2+2i$ sous forme trigonométrique.

$$|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$$

Posons $\theta := arg(2+2i)$.

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{Re(2+2i)}{|2+2i|}=\dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{Im(2+2i)}{|2+2i|}=\dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ convient. Par suite $2+2i=2^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Posons $\rho := |z|$ et $\alpha := arg(z)$.
On a $z=\rho e^{i\alpha}$ et $z^3=\rho^3 e^{3i\alpha}$.

$$z^3=2+2i \Longleftrightarrow \rho^3 e^{3i\alpha}=2^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^3 &= 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\alpha &= \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho &= 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \\ \alpha &= \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3} \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les racines troisièmes de $2+2i$ sont donc

$$z_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}, z_1=\sqrt{2}e^{\frac{9i\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i \text{ et } z_2=\sqrt{2}e^{\frac{17i\pi}{12}}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions cherchées est :

$$\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}=\left\{1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1+i, \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}.$$

f)

$$\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}^7| = \left|\frac{1}{z^2}\right| \\ \arg(\bar{z}^7) = \arg\left(\frac{1}{z^2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'une part,

$$|\bar{z}^7| = \left|\frac{1}{z^2}\right| \Leftrightarrow |\bar{z}|^7 = \frac{1}{|z^2|} \Leftrightarrow |z|^7 = \frac{1}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^9 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

D'autre part,

$$\arg(\bar{z}^7) = \arg\left(\frac{1}{z^2}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow 7\arg(\bar{z}) = -2\arg(z) + 2k\pi \Leftrightarrow -7\arg(z) = -2\arg(z) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -5\arg(z) = 2k\pi \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{2k\pi}{5} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Les solutions sont donc les $e^{-\frac{2ik\pi}{5}}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc 5 solutions :
$z_0 = 1,\ \ z_1 = e^{-\frac{2i\pi}{5}},\ \ z_2 = e^{-\frac{4i\pi}{5}},\ \ z_3 = e^{-\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}},\ \ z_4 = e^{-\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

g) $z^5 - z = z(z^4-1) = z(z^2-1)(z^2+1) = z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$.
Les solutions sont donc 0, 1, -1, i et $-i$.

h)

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27.$$

Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$, l'équation devient $Z^6 = -27$.

$$Z^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |Z^6| = |-27| \\ \arg(Z^6) = \arg(-27) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(Z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(Z) = \dfrac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}.$$

Il y a donc 6 solutions $Z_k = \sqrt{3}e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$ pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Fixons k pour résoudre $Z_k = \dfrac{z_k+1}{z_k-1}$.

$$Z_k = \frac{z_k+1}{z_k-1} \Leftrightarrow Z_k(z_k-1) = z_k+1 \Leftrightarrow Z_kz_k - Z_k = z_k+1 \Leftrightarrow Z_kz_k - z_k = Z_k+1 \Leftrightarrow (Z_k-1)z_k = Z_k+1$$

$$z_k = \frac{Z_k+1}{Z_k-1}.$$

Si on veut les solutions sous forme algébrique, on écrit

$$z_k = \frac{Z_k+1}{Z_k-1} = \frac{(Z_k+1)(\overline{Z_k}-1)}{(Z_k-1)(\overline{Z_k}-1)} = \frac{|Z_k|^2 - Z_k + \overline{Z_k} - 1}{|Z_k|^2 - Z_k - \overline{Z_k} + 1} = \frac{3 - (Z_k - \overline{Z_k}) - 1}{3 - (Z_k + \overline{Z_k}) + 1} = \frac{2 - 2i\mathrm{Im}(Z_k)}{4 - 2\mathrm{Re}(Z_k)}$$

$$= \frac{1 - i\mathrm{Im}(Z_k)}{2 - \mathrm{Re}(Z_k)} = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)},$$

et ce pour $k = 0$, $k = 1$, ... jusqu'à $k = 5$.

$z_0 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{4-3} = 2 - i\sqrt{3}.$

$z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$

$z_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{4+3} = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{7}.$

$$z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{4+3} = \frac{2+i\sqrt{3}}{7}.$$
$$z_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$
$$z_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{4-3} = 2+i\sqrt{3}.$$

Exercice 5-17.

1. Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent les transformations du plan suivantes.
   a) La translation du vecteur d'affixe $-2+i$.
   b) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.
   c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.
   d) La symétrie centrale du centre i.
2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .
   a) $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$. b) $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$. c) $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$. d) $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$.

Correction exercice 5-17.

1. a) $z \mapsto z - 2 + i$
   b) L'application vérifie $f(z) - (1+2i) = 3(z - (1+2i))$, ce qui se simplifie en $f(z) = 3z - 2 - 4i$.
   c) L'application vérifie $f(z) - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1)$, ce qui se simplifie en $f(z) = e^{\frac{i\pi}{6}} z + 1 - e^{\frac{i\pi}{6}}$.
   d) L'application vérifie $f(z) - i = -(z-i)$ soit $f(z) = -z + 2i$.
2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .
   a) f_1 est la translation de vecteur d'affixe $3 - 2i$.
   b) f_2 est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{7}$ et de centre O.
   c) On commence par chercher le point fixe de f_3 :
   $$e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1 = z \Leftrightarrow z(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$
   f_3 est donc la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre d'affixe $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
   d) On commence par chercher le point fixe
   $$3z - 5 + i = z \Leftrightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}.$$
   f_4 est donc l'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $\dfrac{5}{2} - \dfrac{i}{2}$.

Exercice 5-18. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On notera $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application
   $$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & D \\ & z & \mapsto & \dfrac{z+c}{1+\bar{c}z} \end{array}$$
   est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Correction exercice 5-18.

1.

$$\begin{aligned}|z+c| \leq |1+\bar{c}z| &\Leftrightarrow |z+c|^2 \leq |1+\bar{c}z|^2 \Leftrightarrow (z+c)(\bar{z}+\bar{c}) \leq (1+\bar{c}z)(1+c\bar{z})\\ &\Leftrightarrow |z|^2+\bar{c}z+c\bar{z}+|c|^2 \leq 1+c\bar{z}+\bar{c}z+|z|^2|c|^2 \Leftrightarrow |z|^2+|c|^2 \leq 1+|z|^2|c|^2\\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1-|c|^2+|z|^2|c|^2-|z|^2 \Leftrightarrow 1-|c|^2+(|c|^2-1)|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-|c|^2)(1-|z|^2) \geq 0\\ &\Leftrightarrow 1-|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 \Leftrightarrow |z| \leq 1.\end{aligned}$$

2. Montrons tout d'abord que f est bien définie, c'est-à-dire que si $z \in D$, alors $f(z) \in D$ (autrement dit, que $f(D) \subset D$). Soit $z \in D$. D'après la première question,

$$|f(z)| = \left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right| = \frac{|z+c|}{|1+\bar{c}z|} \leq 1.$$

Donc f est bien définie.
Soit maintenant $z' \in D$. Donc $|z'| \leq 1$. On veut montrer qu'il existe un unique $z \in D$ tel que $z' = f(z)$. Montrons d'abord qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $z' = f(z)$, on montrera ensuite que ce z est effectivement dans D.

$$\begin{aligned}z' = \frac{z+c}{1+\bar{c}z} &\Leftrightarrow z'(1+\bar{c}z) = z+c \Leftrightarrow z'-c = z-z'\bar{c}z \Leftrightarrow z'-c = z(1-z'\bar{c})\\ &\Leftrightarrow \frac{z'-c}{1-z'\bar{c}} = z,\end{aligned}$$

le dénominateur est non nul car $|z'\bar{c}| < 1$, en effet $|z'\bar{c}| = |z'||\bar{c}| = |z'||c| < 1$.

On a donc montré qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $z' = f(z)$, reste à montrer que $z \in D$. On pose $c' = -\bar{c}$. On a $|c'| < 1$ donc par la question 1.,

$$|z| = \frac{|z'+c'|}{|1+\bar{c}'z'|} \leq 1.$$

Ainsi, $z \in D$ donc f est bien une bijection. Montrons que $f(C) = C$.

— Montrons que $f(C) \subset C$: soit $z \in C$, i.e. $|z| = 1$.

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right| = \left|\frac{z(1+\frac{c}{z})}{1+\bar{c}z}\right| = \left|\frac{z(1+\frac{c\bar{z}}{|z|^2})}{1+\bar{c}z}\right| = \left|\frac{z(1+c\bar{z})}{1+\bar{c}z}\right| = |z|\frac{|1+c\bar{z}|}{|1+\bar{c}z|} = \frac{|1+c\bar{z}|}{|1+\bar{c}z|} = \frac{|\overline{1+c\bar{z}}|}{|1+\bar{c}z|}\\ &= \frac{|1+\bar{c}z|}{|1+\bar{c}z|} = 1.\end{aligned}$$

Donc $f(z) \in C$, ce qui montre que $f(C) \subset C$.

— Montrons que $C \subset f(C)$: soit $z' \in C$, il existe alors un unique antécédent $z \in D$. Comme vu précédemment, en posant $c' = -\bar{c}$, on a alors $z = \dfrac{z'+c'}{1+\bar{c}'z'}$. Le même calcul que précédemment (avec c' au lieu de c) montre que $|z| = 1$, i.e. que $z \in C$. Ainsi, pour tout $z' \in C$, il existe $z \in C$ tel que $z' = f(z)$ donc $z' \in f(C)$. Donc $C \subset f(C)$.

Par double inclusion, on a montré que $f(C) = C$.

Exercice 5-101. Soit $f : x \mapsto \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-3,0\}$. Calculer $f(1-i)$et $f(1+i)$.

Correction exercice 5-101.

$$\begin{aligned}f(1-i) &= \frac{(1-i)^2-1}{(1-i)(1-i+3)} = \frac{1-1-2i-1}{4-i-4i-1} = -\frac{1+2i}{3-5i} = -\frac{(1+2i)(3+5i)}{3^2+5^2} = -\frac{3+5i+6i-10}{34}\\ &= \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i.\end{aligned}$$

On note de plus que pour $z \in \mathbb{C}$,

$$f(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^2-1}{\bar{z}(\bar{z}+3)} = \frac{\overline{z^2-1}}{\overline{z(z+3)}} = \overline{f(z)}.$$

En particulier, $f(1+i) = f(\overline{1-i}) = \overline{f(1-i)} = \dfrac{7}{34} + \dfrac{11}{34}i.$

Exercice 5-102. Soit $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.

Correction exercice 5-102. Il est possible de développer z^4 puis de l'exprimer sous forme arithmétique. Mais il est plus simple de passer par la forme trigonométrique :

$$z = \frac{3(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}^2+1^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}.$$

Ainsi, $z^4 = \dfrac{3^4}{2^4}e^{-\frac{4i\pi}{6}} = \dfrac{81}{16}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \dfrac{81}{16}e^{\frac{i\pi}{3}} = -\dfrac{81}{32} + i\dfrac{81\sqrt{3}}{32}$.

Exercice 5-103.

1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Correction exercice 5-103.

1. $\cos^2(x)\sin^3(x) = (1-\sin^2(x))\sin^3(x) = \sin^3(x) - \sin^5(x)$.
2. $$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}\\ &= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6}{16} = \frac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{16} = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Exercice 5-104.

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Correction exercice 5-104.

1. Les racines quatrièmes de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.
2. $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc une racine quatrième de ce complexe est $e^{\frac{i\pi}{3}}$. Les autres s'obtiennent en le multipliant par les racines quatrièmes de l'unité, soit
$$\begin{cases} e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ ie^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}+\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ -e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}+i\pi} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -ie^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}-\frac{i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$
3. Posons $Z = z^4$, l'équation devient $Z^2 + (-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})Z - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Une première solution est de résoudre l'équation comme dans l'exercice 5-16. On trouverai $\Delta = 3(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ qui a pour racines $\pm\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \pm\left(\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ce qui donne les solutions $Z_1 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = 1$. On présente ici une autre solution :
$$Z^2 + (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})Z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z^2 + jZ + j^2 = j^2\left(\left(\frac{Z}{j}\right)^2 + \frac{Z}{j} + 1\right).$$

On pose $T = \dfrac{Z}{j}$, l'équation devient $T^2 + T + 1 = 0$, dont les solutions sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$. On en déduit les solutions $Z_1 = j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = j^3 = 1$.

Ainsi, par questions 1 et 2, l'équation $z^8 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ a pour solutions

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right\}$$

Exercice 5-105.

1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$.

Correction exercice 5-105.

1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité autres que 1, c'est-à-dire $z_k = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$. Comme 1 n'est pas racine de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$, les autres racines de ce polynôme sont les z_k pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ce polynôme peut donc se factoriser en $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$.

Exercice 5-106. Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes des nombres complexes suivants :

a) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ pour $n = 3$, b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n = 4$, c) $z = -1$ pour $n = 5$.

Correction exercice 5-106. Pour chacun des trois cas, on trouve une racine n-ième (comme les nombres sont de module 1, il suffit de diviser un argument par n), et on trouve les autres racines n-ièmes de z en multipliant par les racines n-ièmes de l'unité.

a) $\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{11i\pi}{12}}, e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{19i\pi}{12}} (= e^{\frac{-5i\pi}{12}})\}$ b) $\{e^{\frac{i\pi}{20}}, e^{\frac{i\pi}{20}+\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{11i\pi}{20}}, e^{\frac{i\pi}{20}+i\pi} = e^{\frac{21i\pi}{20}}, e^{\frac{31i\pi}{20}}\}$

c) $-1 = e^{i\pi}$ donc $\{e^{\frac{i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{3i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{4i\pi}{5}} = -1, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{7i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{9i\pi}{5}} (= e^{\frac{-i\pi}{5}})\}$.

Exercice 5-107. Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

Correction exercice 5-107. Cherchons une solution réelle x de l'équation. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a

$$x^3 + (1 - 3i)x^2 - (6 - i)x + 10i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - 6x = 0 \\ -3x^2 + x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + x - 6) = 0 \\ -3x^2 + x + 10 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0, 2, -3\} \\ -3x^2 + x + 10 = 0 \end{cases}$$

Seul $x = 2$ est solution de $-3x^2 + x + 10$, donc la seule solution réelle est 2. 2 étant racine, on peut factoriser le polynôme : il existe a, b et c complexes tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = (z - 2)(az^2 + bz + c).$$

On développe et on identifie les coefficients des polynômes, ce qui donne

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 1 - 3i \\ -2b + c = -6 + i \\ -2c = 10i \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 3i \\ c = -5i \end{cases}.$$

Il reste à trouver les solutions de $z^2+(3-3i)z-5i=0$. On a $\Delta=(3-3i)^2+20i=9-9-18i+20i=2i=(1+i)^2$. Ce trinôme a donc deux racines :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3-3i-(1+i)}{2} = 1-2i, \\ z_2 &= \frac{3-3i+1+i}{2} = 2-i. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc $S=\{2,1-2i,2-i\}$.

Exercice 5-108. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^6+(1+3i)z^3+8+8i=0$.

Correction exercice 5-108. Posons $Z=z^3$, l'équation devient $\frac{1}{2}Z^2+(1+3i)Z+8+8i=0$. On a $\Delta=(1+3i)^2-4\frac{1}{2}(8+8i)=1-9+6i-16-16i=-24-10i$. On cherche a et b réels tels que $(a+ib)^2=\Delta$:

$$(a+ib)^2=-24-10i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-24-10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-24 \\ ab=-5 \end{cases}.$$

On ajoute l'égalité des modules $a^2+b^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26$. Ainsi,

$$2a^2=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)=2 \text{ donc } a=\pm1, b^2=(a^2+b^2)-a^2=25 \text{ donc } b=\pm5.$$

Comme $ab<0$, a et b sont de signes différents, donc les deux racines deuxièmes de Δ sont $1-5i$ et $-1+5i$. On en déduit les solutions pour l'équation en Z :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{-(1+3i)-1+5i}{2\times\frac{1}{2}} = -2+2i, \\ Z_2 &= \frac{-(1+3i)+1-5i}{2\times\frac{1}{2}} = -8i. \end{aligned}$$

On cherche donc les racines troisièmes de Z_1 et de Z_2. On utilise ici une méthode mais d'autres sont présentées dans l'exercice 16. ici, on va chercher une racine troisième puis obtenir les autres en la multipliant par les racines troisièmes de l'unité que sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

— $Z_1=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Ainsi, une racine troisième de Z_1 est $2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=1+i$. Les racines troisièmes de Z_1 sont donc

$$\begin{aligned} z_{1,1} &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \\ z_{1,2} &= e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2i\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}, \\ z_{1,3} &= e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{4i\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}. \end{aligned}$$

— $Z_2=8e^{\frac{3i\pi}{2}}=2^3e^{\frac{3i\pi}{2}}$. Ainsi, une racine troisième de Z_1 est $2e^{\frac{i\pi}{2}}=2i$. Les racines troisièmes de Z_2 sont donc

$$\begin{aligned} z_{2,1} &= 2i, \\ z_{2,2} &= e^{\frac{2i\pi}{3}}\times 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}+\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}}, \\ z_{2,3} &= e^{\frac{4i\pi}{3}}\times 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}+\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $S=\{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},\sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}},\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}},2i,2e^{\frac{7i\pi}{6}},2e^{\frac{11i\pi}{6}}\}$.

Exercice 5-109. On considère l'équation suivante :

$$z^4-3z^3+(2-i)z^2+3z-3+i=0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Correction exercice 5-109.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a

$$x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

   Les solutions de $-x^2 + 1 = 0$ sont 1 et -1, et ce sont aussi des solutions de $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3$. Ce sont donc deux solutions réelles de (E) (plus précisément, ce sont les seules).

2. D'après la question 1., on peut mettre $(z-1)(z+1) = z^2 - 1$ en facteur : il existe a, b et c complexes tels que

$$x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = (z^2 - 1)(az^2 + bz + 1).$$

   En développant le membre de droite et en identifiant les coefficients des polynômes, on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}.$$

   On a donc $x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = (z^2 - 1)(z^2 - 3z + 3 - i)$. Il reste à trouver les solutions de $z^2 - 3z + 3 - i = 0$. On a $\Delta = 9 - 4(3-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$, les deux solutions sont donc

$$z_1 = \frac{3 - (1+2i)}{2} = 1 - i,$$
$$z_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i.$$

   L'ensemble des solutions de (E) est donc $S = \{1, -1, 1-i, 2+i\}$.

Exercice 5-110. On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z(1-z) \end{array}$$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Indication : on pourra remarquer que $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$.

Correction exercice 5-110.

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z - z^2 = z \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| &= \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \le \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4} \\ &\le \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   Ainsi, si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.