Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

AlgÃ¨bre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Feuille d'exercices n° 7

PUISSANCES ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'UNE MATRICE

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver la décomposition spectrale de Dunford de A.
2. Trigonaliser A.
3. Déterminer les puissances A^n, $n \geq 0$.

Exercice 2. Calculer les puissances A^n, $n \in \mathbb{Z}$, de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Attention : Décomposer $A = D + N$ *où* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ne va pas aboutir, bienque* N *est nilpotent. Pourquoi ?*

Exercice 3. On considère la suite définie par $u_0 = 2u_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, déterminer la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 2$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $P^{-1}AP = T$.
3. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.
4. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 4. Pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les espaces caractéristiques.
2. Déterminer les projecteurs spectraux.
3. Déterminer la decomposition spectrale (de Dunford).

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{id}$. Exprimer les projecteurs spectraux de u comme des polynômes en u.
2. Soient a et b deux scalaires et u un endomorphisme de E tel que $(u - a\mathrm{id})(u - b\mathrm{id}) = 0$. Exprimer les projecteurs spectraux de u en fonction de u. Distinguer selon $a \neq b$ ou non.
3. On suppose E de dimension 2 sur $\mathbb{C}$. Exprimer les projecteurs spectraux de u en fonction de u.