Feuille d'exercices n° 3

Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

1 Valeurs propres et vecteurs propres

Les exercices de la Section 1 peuvent se faire sans utilisation du polynôme caractérisistique.

Exercice 1. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire l'équation propre pour A.
2. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A sans passer par le polynôme caractéristique. Est-ce qu'il sont rationels, réels ou complexes ?
3. On specifie maintenant le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Quels sont les valeurs propres de A (dans $\mathbb{K}$) ?
4. On specifie maintenant le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont les valeurs propres de A (dans $\mathbb{K}$) ?
5. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de $A^2 - 1_2$?

Exercice 2 (Réflection dans le plan)**.** Soit L une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$, qui passe par l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Soit u la reflection à l'axe L.

1. Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
2. Ecrire l'équation propre pour u.
3. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de u sans passer par le polynôme caractéristique et sans utiliser des coordinés (c.à.d. donner une déscription géométrique des vecteurs propres et faire une figure).

Exercice 3 (Rotation dans le plan)**.** Soit u_α une rotation par l'angle α de centre 0 dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
2. Ecrire l'équation propre pour u.
3. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de u_α, $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Exercice 4. Comme dans l'exercice précédente, soit u_α une rotation par l'angle α dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Choisir une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et exprimer u_α dans cette base. On note $A_\alpha := [u_\alpha]_{\mathscr{B}}$.
2. On considère A_α comme une matrice à coefficients complexes. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A_α, $\alpha \in [0, 2\pi[$ (sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Exercice 5 (Cisaillement dans le plan)**.** Soit L une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$, qui passe par l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Soit u_a une transformation par cisaillement lelong de cette droite : Imaginez une deuxième droite L' parallel et à une distance 1 de L. Il existe une application linéaire u_a, qui laisse les points de L fixe et décale les points de L' par une distance a. (Pour rendre cette application unique, il fallait specifier vers quel coté se trouve L' par rapport à L et vers quel coté on décale L'. Puis, il fallait choisir une unité de distance.)

1. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de u_a, $a \neq 0$.
2. Choisir une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et exprimer u_a dans cette base.

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Sans passer par le polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres de u.
4. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

2 Polynôme caractéristique

Exercice 7.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier la formule suivante pour le polynôme caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

   Ici $\operatorname{tr}(A)$ est la trace de A, $\operatorname{tr}((a_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique est alors de la forme

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 - f(A)\lambda + \det(A).$$

   (a) Exprimer $f(A)$ à l'aide des cofacteurs de A.

   (b) On suppose maintenant que la matrice A est triangulaire supérieure. Montrer que

$$f(A) = \frac{1}{2}\Big(\big(\operatorname{tr}(A)\big)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big).$$

   (NB : La formule reste vraie sans l'hypothèse que A soit triangulaire.)

Exercice 8. Soient a, b et c trois nombres complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si son rang est égal à 1.
6. On suppose que la matrice A est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

3 Diagonalisation

Exercice 9. Déterminer si les endomorphismes u, u_α, u_a des Exercices 2,3,5 sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou non. Les-quels sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$?

Exercice 10. Soit φ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si chacun de ces endomorphismes est diagonalisable. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres et la matrice correspondante dans cette base en donnant la matrice de passage.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui, donner une telle base.
3. Déterminer la matrice f^n pour $n \in \mathbb{N}$ dans une base de votre choix.

Exercice 12. Diagonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.
2. Montrer sans nouveaux calculs qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à une base formée de vecteurs propres.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$?

Exercice 15. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
En diagonalisant A, trouver une solution Z dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $Z^2 = A$.

Exercice 16. Soit $V = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et soit u l'endomorphisme de V défini par
$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.
2. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 17. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par
$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 18. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang égal à 1.

1. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.