Feuille d'exercices n° 6

TRIGONALISATION

Exercice 1. Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Trigonaliser A.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Trigonaliser A.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Trigonaliser A.

Exercice 5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = \quad y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ et soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ qui satisfont la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs réelles.
2. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a \neq 1$.
3. On suppose $a \neq 1$.
   (a) Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
   (b) Calculer A^n.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
   (d) Donner une base de E.
4. On considère maintenant le cas $a = 1$.
   (a) Trouver une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.
   (b) Calculer T^n et puis A^n.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
   (d) Donner une base de E.

Exercice 9. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

1. Écrire la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sous la forme d'une équation matricielle
$$X_{n+1} = AX_n.$$
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. Calculer u_n pour tout n.