Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-22

Math III - Licence Mathématiques Générales et Applications L2

Feuille d'exercices n° 1

Révisions d'algèbre linéaire

---

1 Espaces vectoriels

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille libre de vecteurs de E.

1. On pose $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_3 + e_1$. Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.
2. On pose $g_1 = e_1 + e_2$, $g_2 = e_2 + e_3$, $g_3 = e_3 + e_4$ et $g_4 = e_4 + e_1$. Montrer que la famille $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ n'est pas libre.
3. On pose $h_1 = e_1 + e_2$, $h_2 = e_2 + e_3$, $\dots$, $h_{n-1} = e_{n-1} + e_n$ et $h_n = e_n + e_1$. La famille de vecteurs $\{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n\}$ est-elle libre ?

Exercice 2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$: $u_1 = (1, 2, 0, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$,$u_1 = (1, 4, 1, 2, 1)$.

1. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^5$. À quelle condition $v \in \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$?
3. Trouver un supplémentaire de $E = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à une variable, qui ont un degré ≤ 4.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (X - 1, X + 1, X^2 - 1, X^3, X^4 - X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Exprimer le polynôme $p(X) = (X^2 + 1)(X - 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4.

1. Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}\{u, v, w\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{x, y\}$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

2 Applications linéaires et matrices

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application u :

$$\begin{aligned} u :\ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{aligned}$$

1. Montrer que u est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $u(e_3) = e_1$. Donner la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. Soit u la rotation par 45^0 dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec centre 0 (dans le sens direct). Proposer une base pour $\mathbb{R}^2$ est exprimer u dans cette base. Argumenter pourquoi u est un endomorphisme. Est-ce que une translation dans le plan est un endomorphisme ?

Exercice 8. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à une variable, qui ont un degré ≤ 4.

1. Montrer que la dérivation $D(p) = p'$ d'un polynôme est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer la matrice $[D]_\mathcal{B}$ de D dans la base $(1, X^1, X^2, X^3, X^4)$.
3. Déterminer le noyeau est le rang de D.

Exercice 9. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix}$.
Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^3 | \ u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et leurs dimensions.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
3. Soit e_1 un vecteur directeur de E et (e_2, e_3) une base de F. Calculer la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 10. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\varepsilon_1 = (1; 1; 1)$, $\varepsilon_2 = (1; -1; 0)$, $\varepsilon_3 = (1; 0; 1)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice M de u dans cette base. Quelle relation lie A et M ?
3. Déterminer une base pour $\ker u$ et une base pour $\operatorname{im} u$.