Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022
Algèbre III - Licence Mathématiques Générales et Applications L2

Feuille d'exercices n°5
Sous-espaces stables - Polynôme minimal

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les sous-espaces stables de dimension 0 et 3.
2. Déterminer les sous-espaces stables de dimension 1.
3. Déterminer les espaces caractéristiques de A avec leur dimension.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de l'espace cyclique $\langle x \rangle_A$ engendré par x.
5. Quels sont les sous-espaces stables de dimension 2?

Exercice 2. Pour les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer leurs espaces propres.
2. Déterminer leurs espaces caractéristiques.
3. Déterminer leur polynôme minimal.

Exercice 3 (Cisaillement dans le plan)**.** *On reprend la transformation de cisaillement de la Feuille 3. Le but de l'exercice est de visualiser les calculs d'une manière géométrique.*
Soit L la droite horizontale dans le plan $\mathbb{R}^2$, qui passe par l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Soit u_a la transformation par cisaillement lelong de cette droite: Imaginez une deuxième droite L' au dessus, parallel et à une distance 1 de L. Il existe une application linéaire u_a, qui laisse les points de L fixe et décale les points de L' par une distance $a > 0$ vers la droite.

1. Rappeller les résultats obtenus concernants les vecteurs propres et les valeurs propres de u_a.
2. Quels sont les espaces propres de u_a?
3. Quels sont les espaces caractéristiques de u_a?
4. Quel est le polynôme minimal de u_a?

Exercice 4. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit J une matrice complexe de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^p pour tout entier $1 \leq p \leq 4$.
2. Montrer que I_4, J, J^2, J^3 sont linéairement indépendantes.
3. Déterminer le polynôme minimal de J.
4. Calculer les valeurs propres de J.
5. Est-ce que J est diagonalisable?

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^4 = f^2$$

On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 8. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 - X^2$. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n qui est annulé par P.

1. Quelles sont les possibilités pour le polynôme minimal de u?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et k t.q.

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} & \text{si } k \neq 0, n \\ \quad 1_n & \text{si } k = n \\ \quad N & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

   où N est une matrice nilpotent d'indice 1 ou 2.