Feuille d'exercices n° 2

DÉTERMINANTS

1 Permutations

Exercice 1.

1. Donner les six éléments de S_3. Faire une table pour la loi de groupe de S_3.
2. On notera 1, 2 et 3 les sommets d'un triangle équilatéral. Comment les éléments de S_3 transforment ce triangle ? Distinguer le cas des transpositions des autres.
3. Quels sont les permutations de S_3 qui ont signe $+1$?
4. Quel est l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?
5. Montrer que les permutations de S_3 ne commutent pas toujours.

Exercice 2.

1. Déterminer la signature de $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit σ une permutation qui satisfait $\sigma^3 = \mathrm{id}$. Quelle est sa signature ?

Exercice 3. Soient π_1, π_2 et π_3 trois permutations de S_8 données dans la notation en deux lignes par les expressions suivantes :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ et $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.
2. Calculer les inverses de π_1, π_2 et π_3.
3. Représenter les permutations comme produit de transpositions.
4. Calculer leurs signatures.

Exercice 4. Soient $\sigma = (ij)$ est $\tau = (kl)$ deux transpositions de S_n, $i \neq j$, $k \neq l$. Sous quelle condition à i, j, k, l est-ce qu'on a $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$?

2 Déterminant

Exercice 5. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.
Calculer AB puis $\det B$.

Exercice 7. Vrai où faux ? Soit M une matrice $2n \times 2n$ qui contient des blocks de matrices $n \times n$ A, B, C, D,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Alors $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Exercice 8. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur du déterminant de M.

Exercice 9. Soient k et a deux réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Montrer que les matrices suivantes ont un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. À l'aide du pivot de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soit $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ avec $adf \neq 0$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la comatrice de A.
2. En utilisant la formule de Cramers, calculer l'inverse de A.

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $D_n = \det A_n$.

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Calculer D_n en fonction de n (on pourra proceder de façon directe ou par récurrence).
3. Calculer le rang de la matrice A_n en fonction de a.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, *i.e* ${}^tA = -A$.
Montrer que si A est inversible, alors n est nécessairement pair.

Exercice 16. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 17. On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.