Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

Algèbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Feuille d'exercices n° 4

Équations d'évolutions linéaires

Exercice 1. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

avec conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une matrice A telle que l'équation matricielle $AX_n = X_{n+1}$ soit satisfaite pour tout n.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

avec conditions initiales $u_0 = a$, $u_1 = 1$.

1. On utilisant la stratégie de l'exercice precédente trouver l'expression de u_n en fonction de n et a.
2. Déterminer $\lim u_n$ en fonction de a.
3. Pour quelle valeur de a est-ce que u_n reste borné ?

Exercice 3. On considère le système de suites rćurrentes

$$\begin{cases} p_n = q_{n-1} + r_{n-1} \\ q_n = p_{n-1} + r_{n-1} \\ r_n = p_{n-1} + q_{n-1} \end{cases}$$

avec conditions initiales $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $r_0 = 0$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une matrice A telle que l'équation matricielle $AX_n = X_{n+1}$ soit satisfaite pour tout n.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Résoudre p_n, q_n et r_n en fonction de n.

Exercice 4. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

1. Quelle est la dimension de l'espace des solutions ?
2. Est-ce qu'ils existent des solutions constantes ?
3. Est-ce qu'ils existent des solutions $(x(t), y(t), z(t))$ t.q. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$?
4. Est-ce qu'ils existent des solutions $(x(t), y(t), z(t))$ t.q. $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$?

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$f''(x) + 5f'(x) - 6f(x) = 0$$

1. On pose $X(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner une matrice A telle que l'équation matricielle $X'(t) = AX(t)$ soit satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire une expression de e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. On fixe des conditions initiales : $f(0) = 0$, $f(0) = 1$. Quelle est la solutions de l'équation différentielle qui satisfait ces conditions initiales ? Est-ce qu'elle est bornée ?

Exercice 6. Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$.