

Partiel du 19 octobre 2021

durée 90 minutes

Les documents et calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Déterminer les valeurs propres.
3. En déduire si A est diagonalisable ou non. Si oui, expliciter D , la matrice diagonale correspondante, puis donner une base de vecteurs propres et le lien entre la matrice A et la matrice D .

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme de f de \mathbb{R}^4 dans la base canonique.

1. Montrer que $a + 1$ est une valeur propre de f .
2. Trouver la dimension du sous-espace vectoriel $\ker(f - (a + 1)\text{id})$.
3. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f .
4. Quelles sont les valeurs propres de f ?
5. Est-ce que f est diagonalisable ? Si oui, donner une base \mathcal{B} à partir des vecteurs propres et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^4 représenté par la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ d & 1 & 1 & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Donner la définition de vecteur propre de l'endomorphisme f .
2. Trouver les quadruplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, pour lesquels f admet $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre.
3. Montrer que si v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1, alors 0 est une valeur propre de f .

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$