Feuille d'exercices n° 6

Nombres réels et suites réelles

Exercice 1. Pour chacun des ensembles qui suivent, déterminer s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

a) $[0,1[$

b) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

c) $\left\{ \frac{m}{mn+1} \;\middle|\; (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \right\}$

d) $[0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $-A = \{ -a \mid a \in A \}$.
   a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup(-A)$ existe et qu'alors $\inf A = -\sup(-A)$.
   b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf(-A)$ existe et qu'alors $\sup A = -\inf(-A)$.
2. Supposons $B \subset A$.
   a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leqslant \sup A$.
   b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geqslant \inf A$.
3. On note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. À quelle condition $\sup(A + B)$ existe-t-elle ? Dans ce cas, l'exprimer en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f^*(y) = \sup_{x \leqslant y} f(x).$$

1. Illustrer la définition de f^* par des figures rapides sur différents exemples de fonctions f.
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^*.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut établir que f possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Posons

$$T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}.$$

1. — Démontrer que T possède une borne inférieure t.
   — Démontrer que $f(t)$ minore T.
   — Établir l'inclusion $f(T) \subset T$.
   — En déduire que t est un point fixe de f.
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0,1[$ dans $[0,1[$?

Exercice 5. On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire si elle est constante à partir d'un certain rang.
2. Soit $D \subset \mathbb{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ N \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Est-ce toujours vrai si $\ell \neq 0$?

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de $\max\{x, y\}$ en fonction de x et y pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (*Indication : on pourra s'intéresser à* $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$ *et* $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$) ;
2. en revenant à la définition de la limite.

Exercice 10. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dont le terme général est donné par :

a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$,

b) $u_n = \left(n + \dfrac{2}{n^2}\right)^3 - n^3$,

c) $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) - n^2$,

d) $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$,

e) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$,

f) $u_n = \dfrac{2n^6+5n+1}{n^6-2}$,

g) $u_n = (-1)^n n$,

h) $u_n = \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$,

i) $u_n = \sqrt[n]{n}$,

j) $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)-4}{n^2}$,

k) $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$,

l) $u_n = \dfrac{(-5)^n+n}{3^n-1}$,

m) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 11. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2+n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas .

Exercice 13. *Irrationalité de e.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Nous allons démontrer que e est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels $p, q \geqslant 1$ tels que $e = \frac{p}{q}$.
   — Établir l'encadrement $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   — Vérifier que $q!u_q$ et $q!v_q$ sont deux nombres entiers consécutifs.
   — Conclure le raisonnement.

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite des suites de terme général :
   a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ b) $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 15. *Somme harmonique*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. *Lemme de Cesàro.*

1. Soit (u_n) une suite réelle. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$
Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) converge également vers ℓ.
2. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ. .
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$
Démontrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.
4. Déduire de ce qui précède
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$
(*Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 14*)

Exercice 17. *Suites arithmético-géométriques.*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et soit $u^{(0)} \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). (*Indication : on distinguera les cas* $|a| < 1$, $a > 1$ *et* $a \leq -1$).
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 18.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1-u_n), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
4. Montrer que les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
5. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante *(On pourra s'aider de la question 3.)* En déduire la nature de la suite (u_n). Même question si $u_0 \in]-\infty, 0[$.
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Exercice 19.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall\, n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(x^2-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Répéter pour f l'étude des questions 1 à 3 de l'exercice précédent.
2. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
3. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 *(On pourra montrer que pour $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, on a $|f(x)| \leq |x|$).* Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
4. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
5. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Exercice 20.
En suivant la démarche des exercices 18 et 19, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^2 + 1$, c) $f(x) = \sqrt{1+x}$,

d) $f(x) = 1 + \ln(x)$, e) $f(x) = e^x - 1$, f) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

Pour certaines valeurs de u_0, la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

Exercice 21.

1. Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. On définit $\varphi : [3,5] \to [3,5]$, $x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
   a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ.
   b) Montrer que : $\forall x \in [3,5]$, $|\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n) \in [3,5]^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
   a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
   b) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 22. *Calcul approché de $\sqrt{a}$.*
Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n).
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.
4. Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n}$.

Exercice 23.
Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

Exercice 24. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Exercice 25.

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 26.

Soient I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution x_n ;

— la fonction f_n est strictement croissante sur I ;

— pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n\in N}$.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$.

Exercice 27.

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de la suite (x_n).