Feuille d'exercices n° 4
Fonctions usuelles

1 Logarithme

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln 2=0$ b) $\log_{10}(x+2)-\log_{10}(x+1)=\log_{10}(x-1)$

Exercice 2. Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

Exercice 3. Y a-t-il un point du graphe du logarithme népérien tel que la tangente au graphe en ce point passe par l'origine ?

Exercice 4. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 5. Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Exercice 6. Montrer que l'équation

$$\ln(1+|x|)=\frac{1}{x-1}$$

possède exactement une solution $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $1<\alpha<2$.

Exercice 7. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

2 Exponentielle

Exercice 8. Etudier la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x)=e^x-e^{-x}$ b) $g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ c) $h(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x}-e^x-6=0$ b) $3e^x-7e^{-x}-20=0$ c) $e^{5x}+e^{3x}+e^x=0$

Exercice 10. Déterminer la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

a) $\ln(x) - e^x$ b) $\dfrac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$ c) $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}$

Exercice 11.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - x}$.
   (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Rappel : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) En déduire que f atteint un maximum sur $\mathbb{R}$ puis le déterminer.

3 Fonctions trigonométriques

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Calculer f' et déduire le sens de variation de f sur I.
3. Tracer le graphe de f.

Exercice 13. Déterminer la valeur de

a) $\arcsin(-1/2)$ b) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ c) $\arctan(\sqrt{3})$

d) $\arccos(\cos(2\pi/3))$ e) $\arccos(\cos(-2\pi/3))$ f) $\arccos(\cos(4\pi/3))$.

Exercice 14. Donner le domaine de définition maximal des équations suivantes puis les résoudre :

a) $\sin^2(x) = 1$ b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ c) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 15.

1. Tracer le graphe des fonctions $\arcsin \circ \sin$ et $\sin \circ \arcsin$.
2. Donner le domaine de définition maximal des expressions suivantes puis simplifier les :

   a) $\tan(\arcsin x)$ b) $\sin(\arccos x)$ c) $\cos(\arctan x)$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 17. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$
2. Déterminer la limite de la suite

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

Exercice 18. Donner le domaine de définition maximal des fonctions suivantes. Puis, donner leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$ b) $g(x) = \arcsin(\cos(x))$ c) $h(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

4 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 19. Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

Exercice 20. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sinh(1/x)$.

1. Etudier la parité de f.
2. Etudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geq 0$ on a $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f et tracer son graphe.

Exercice 21. Déterminer les couples de réels (a, b) tels que le système suivant admette une solution :

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) &= a \\ \sinh(x) + \sinh(y) &= b \end{cases}$$

Exercice 22. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right)^n = \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$