Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Fondamentaux des mathématiques I 13 janvier 2021. Durée : 1 heure

---

Seconde Chance

Les exercices sont indépendants les uns des autres

Exercice 1. Ici, i désigne un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1) Déterminer les parties réelle et imaginaire de

$$\delta = e^{i\pi/4}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$-z^2 + 2z + i - 1 = 0.$$

Solution.

1. $\mathrm{Re}(\delta) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(\pi/4) = \mathrm{Im}(\delta)$.
2. Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4\,(-1)\,(i-1) = 4i = 2^2 e^{i\pi/2}$. Soit $\delta = e^{i\pi/4}$. Alors $(2\delta)^2 = 2^2 e^{i\pi/2} = \Delta$. Ainsi les solutions sont

$$z_{1/2} = \frac{-2 \pm 2\delta}{-2} = 1 \mp \delta = 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \in \{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\}.$$

Exercice 2. On considère la fonction réelle $f : x \longmapsto 1 + \ln \sqrt{x}$.

1. Donner le domaine de définition maximal de f.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f, et calculer la fonction dérivée.
3. Déterminer la monotonie de f.
4. Donner le tableau des variations de $f(x) - x$, et résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in [1, \infty[$.
5. En déduire que l'intervalle $[1, \infty[$ est stable par f.
6. Soit $u_0 > 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et décroissante.
7. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Solution.

1. Il faut que $\sqrt{x} > 0$, donc $x > 0$. Le domaine maximal est $\mathbb{R}_+^*$.
2. On a $f(x) = 1 + \ln x^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\ln x$, donc $f'(x) = \frac{1}{2x}$. Ainsi f est dérivable sur tout son domaine $\mathbb{R}_+^*$.
3. On a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissant.
4. On a $(f(x) - x)' = f'(x) - 1 = \frac{1}{2x} - 1$. Ainsi

x	1		∞
$f(x) - x$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x) - 1$	$-\frac{1}{2}$	$-$	-1

   Donc $f(x) - x$ est négatif pour $x > 1$, et la seule solution dans $[1, \infty[$ de $f(x) = x$ est $x = 1$.

5. Comme f est croissant, pour $x \geq 1$ on a $f(x) \geq f(1) = 1$. Donc $[1, \infty[$ est stable par f.

6. Comme $[1, \infty[$ est stable par f, si $u_n \in [1, \infty[$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, \infty[$. Par récurrence, u_n est bien défini pour tout $n \geq 0$. De plus, pour $u_0 > 1$ on a $f(u_0) < u_0$. Puisque f est croissant, si $u_{n+1} \leq u_n$ alors

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$

Par récurrence, $(u_n)_n$ est décroissante.

7. $(u_n)_n$ est minoré par 1. Puisque la suite est décroissante, et est convergente vers le seul point fixe de f, qui est 1.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. Soit $x \in f^{-1}(B) \cap A$. Montrer que $f(x) \in B$ et $f(x) \in f(A)$. En déduire que $f(f^{-1}(B) \cap A) \subset B \cap f(A)$.
2. Montrer que réciproquement $B \cap f(A) \subset f(f^{-1}(B) \cap A)$.

On vient de montrer que $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$. Cette formule est appelée *formule de projection.*

Solution.

1. Puisque $x \in f^{-1}(B)$ on a $f(x) \in B$. Puisque $f \in A$ on a $f(x) \in f(A)$. Ainsi $f(x) \in B \cap f(A)$. Or, $x \in f^{-1}(B) \cap A$ était arbitraire. Donc $f(f^{-1}(B) \cap A) \subseteq B \cap f(A)$.
2. Soit $y \in B \cap f(A)$. Il y a donc $x \in A$ avec $f(x) = y$. Puisque $y \in B$ on a $x \in f^{-1}(B)$, d'où $x \in f^{-1}(B) \cap A$. Or, $y \in B \cap f(A)$ était arbitraire. Ainsi $B \cap f(A) \subseteq f(f^{-1}(B) \cap A)$.

Exercice 4. Soient m, n des entiers relatifs premiers entre eux. Montrer que $\text{pgcd}(m + n, mn) = 1$.
[Indication : Supposer par l'absurde que $\text{pgcd}(m + n, mn) > 1$, et en considérer un facteur premier.]

Solution. Supposer par l'absurde que $\text{pgcd}(m + n, mn) > 1$. Alors $\text{pgcd}(m + n, mn)$ a un facteur premier, disons p. Comme $p \mid mn$, soit $p \mid m$ soit $p \mid n$. De plus, $p \mid m + n$. Dans le premier cas, $p \mid (m + n) - m = n$, dans le deuxième cas $p \mid (m + n) - n = m$. Ainsi $p \mid \text{pgcd}(m, n) = 1$, une contradiction.
Ainsi $\text{pgcd}(m + n, mn) = 1$.