Outils analytiques

Théorème de Darboux. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors pour tout c entre $f'(a)$ et $f'(b)$ il y a $x \in [a,b]$ avec $f'(x) = c$.

Démonstration : Si $c = f(a)$ ou $c = f(b)$, rien à démontrer. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f'(a) > f'(b)$; en remplaçant $f(x)$ par $f(x) - cx$ on peut supposer $f'(a) > c = 0 > f'(b)$.

Puisque $f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(a')-f(a)}{a'-a} < 0$ il y a $a < a' < b$ avec $f(a') > f(a)$. De même, il y a $a < b' < b$ avec $f(b') > f(b)$. Par le théorème du maximum il y a $x \in [a,b]$ tel que $f(x)$ est maximal. Mais ni $f(a)$ ni $f(b)$ sont maximaux. Ainsi $x \in]a,b[$ et $f'(x) = 0$. $\square$

Deuxième théorème des accroissements finis. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il y a $c \in]a,b[$ avec

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Remarque. Si $g' \neq 0$ sur $]a,b[$ et $g(a) \neq g(b)$, on reécrit la conclusion comme

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Démonstration : On pose

$$h(x) = [f(x) - f(a)]\,[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]\,[g(x) - g(a)].$$

Alors $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, avec $h(a) = h(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle il y a $c \in]a,b[$ avec

$$0 = h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(c).$$

Le théorème en découle. $\square$

Règle de l'Hospital (ou de l'Hôpital). Soient f et g deux fonctions réelles dérivables sur $]a,b[$, tel que $g' \neq 0$ sur $]a,b[$. Si $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$ et $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque. En remplaçant $f(x)$ et $g(x)$ par $f(-x)$ et $g(-x)$, on obtient les théorèmes analogues pour $x \to a$.

Démonstration : On note d'abord que si $b = \infty$ et le théorème est vrai pour $b \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = f(\frac{1}{x})$ et $G(x) = g(\frac{1}{x})$. Alors avec $y = \frac{1}{x}$ on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{f'(\frac{1}{y})\,(-y^{-2})}{g'(\frac{1}{y})\,(-y^{-2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

On peut donc supposer $b \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$, on prolonge f et g en b par continuité, avec $f(b) = g(b) = 0$. Puisque $g' \neq 0$ sur $]a,b[$, le théorème de Rolle implique que $g \neq 0$ sur $]a,b[$. D'après le deuxième théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [a,b]$ il y a $c_c \in]x,b[$ avec

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Or, si $x \to b$ alors $c_x \to b$ également. Ainsi

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Si $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \infty$, soit $\lim_{x\to b} \frac{f'x)}{g'(x)} = \ell$. D'après le théorème de Darboux, g' ne peut pas changer de signe sur $]a, b[$ puisque $g' \neq 0$. Ainsi $g' > 0$ sur $]a, b[$.

Soit $\epsilon > 0$. Alors il y a $x_0 < b$ tel que $\frac{f'x)}{g'(x)} \leq \ell + \epsilon$ pour $x \in [x_0, b[$. Ainsi $f'(x) - (\ell+\epsilon)g'(x) \leq 0$ sur $[x_0, b[$, et $f(x) - (\ell + \epsilon)g(x)$ est décroissant sur $[x_0, b[$. Donc $f(x_0) - (\ell + \epsilon)g(x_0) \geq f(x) - (\ell + \epsilon)g(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \epsilon + \frac{f(x_0) - (\ell + \epsilon)g(x_0)}{g(x)}.$$

Puisque $\lim_{x\to b} g(x) = \infty$, il y a $\delta_0 > 0$ tel que pour $x \in [b - \delta_0, b[$ on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + 2\epsilon.$$

De même, il y a $x_1 < b$ tel que $\frac{f'x)}{g'(x)} \geq \ell - \epsilon$ pour $x \in [x_1, b[$, et $f'(x) - (\ell - \epsilon)g'(x) \geq 0$. Ainsi $f(x) - (\ell - \epsilon)g(x)$ est croissant sur $[x_1, b[$, et $f(x_1) - (\ell - \epsilon)g(x_1) \leq f(x) - (\ell - \epsilon)g(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \ell - \epsilon + \frac{f(x_1) - (\ell - \epsilon)g(x_1)}{g(x)}.$$

Puisque $\lim_{x\to b} g(x) = \infty$, il y a $\delta_1 > 0$ tel que pour $x \in [b - \delta_1, b[$ on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \ell - 2\epsilon.$$

Mais cela implique que $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. $\square$

Remarque. Le théorème original est pour une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, avec $f(b) = g(b) = 0$ et $g'(b) \neq 0$. Alors $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}$. Ceci se démontre aisément :

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \frac{x - b}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$