Le Théorème Fondamental de l'Algèbre

Proposition. Soit $P(Z) \in \mathbb{C}[Z]$. Alors il y a $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $P(\alpha) = 0$.

Démonstration : On peut suppose $\deg p = d > 0$. Soit $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_d Z^d$ avec $a_d \neq 0$. On pose $R = 1 + (2\,|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|)/|a_d|$. Alors pour $|Z| \geq R$ on a

$$\begin{aligned}|P(Z)| &\geq |a_d Z^d| - (|a_0| + \cdots + |a_{d-1} Z^{d-1}|) \geq |Z^{d-1}|\,(|a_d Z| - (|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|)) \\ &\geq |a_d|\,R - (|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|) > |a_0| = |P(0)|.\end{aligned}$$

On va maintenant montrer que $|P(Z)|$ atteint un minimum dans l'intérieur du disque fermé $|Z| \leq R$ (qui sera donc un minimum global). Ceci est une généralisation du théorème du maximum aux fonctions réelles de deux variables ; comme on ne l'a pas vu, on le démontrera à la main.

Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$ on considère la fonction réelle $f_\varphi : r \mapsto |P(r\,e^{i\varphi}|$. Elle est continue ; d'après le théorème du maximum elle prend un minimum m_φ sur l'intervalle $[-R, R]$. Puisque $f_\varphi(0) = |P(0)| < |P(r\,e^{i\varphi})| = f_\varphi(r)$ pour $r \geq R$, ce minimum m_φ est un minimum de f_φ.

Maintenant on considère la fonction $g : \varphi \mapsto m_\varphi$. Si $|\varphi - \varphi'| \leq \epsilon$, soient $r_\varphi, r_{\varphi'} \in [-R, R]$ tels que $f_\varphi(r_\varphi) = m_\varphi$ et $f_{\varphi'}(r_{\varphi'}) = m_{\varphi'}$. Soit M la valeur maximale des modules des coefficients de $P, P', \ldots, P^{(d)}$. D'après la formule de Taylor, on a

$$P(Z) = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(Z_0)}{k!}(Z - Z_0)^k.$$

Avec $z = r\,e^{i\varphi}$ et $z_0 = r\,e^{i\varphi'}$, on a

$$|z - z_0| = r\,2 \sin \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} \leq R\epsilon.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f_\varphi(r) - f_{\varphi'}(r)| \leq |P(z) - P(z_0)| = \sum_{k=1}^{d} \frac{P^{(k)}(Z_0)}{k!}(Z - Z_0)^k \leq \sum_{k=1}^{d} \frac{(k+1)MR^k}{k!} R^k \epsilon^k \leq M'\epsilon$$

pour une constante M' indépendante de r et de $\epsilon \leq 1$. Ainsi

$$m_\varphi - M'\epsilon = f_\varphi(r_\varphi) - M'\epsilon \leq f_\varphi(r_{\varphi'}) - M'\epsilon \leq f_{\varphi'}(r_{\varphi'}) = m_{\varphi'} \leq f_{\varphi'}(r_\varphi) \leq f_\varphi(r_\varphi) + M'\epsilon = m_\varphi + M'\epsilon.$$

Il en découle que la fonction g est continue ; comme elle est 2π-périodique, elle prend un minimum φ_0. Ainsi, $|P(Z)|$ prend une valeur minimale, disons en $z_0 = r_{\varphi_0}\,e^{i\varphi_0}$, avec $P(z_0) = a$. On cherche à montrer que $a = 0$.

Pour une contradiction, supposons $|a| > 0$. D'après la formule de Taylor,

$$P(z) = a + c_k\,(z - z_0)^k + \cdots + c_d(z - z_0)^d$$

pour un $k \geq 1$ et des coefficients $c_k, \ldots, c_d$ avec $c_k \neq 0 \neq c_d$. Soit $q(z) = a + c_k\,(z - z_0)^k$. Alors

$$\left|\frac{P(z) - q(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\right|$$

est borné par $M'' = |c_{k+1}| + \cdots + |c_d|$ pour $|z - z_0| \leq 1$. Soit

$$\theta = \frac{\arg(a) + \pi - \arg(c_k)}{k}$$

et $z = z_0 + r\,e^{i\theta}$. Alors pour $r \leq 1$ on a

$$|P(z)| \leq |q(z)| + |P(z) - q(z)| \leq |a + (-1)\,c_k r^k e^{i\,\arg(a) - \arg(c_k)}| + M'' r^{k+1} = |a| - |c_k|\,r^k + M'' r^{k+1} < |a|$$

pour $0 < r < |c_k|/M''$. Ceci contredit la minimalité de $|a|$.

Ainsi, $a = 0$. □

Théorème Fondamental de l'Algèbre. Tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé.

Démonstration : Par récurrence sur $\deg(P)$. L'énoncé est trivial si P est constant. On suppose donc l'énoncé vrai pour des polynômes de degré n, et on considère $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$. D'après le lemme ci-dessus, il y a $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha_1) = 0$. Donc $X - \alpha_1$ divise P, et il y a $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(X) = (X - \alpha_1)\,Q(X)$. Or, $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = n$. D'après l'hypothèse de récurrence, Q est scindé. Ainsi P est scindé. □