Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 2 décembre 2020

Devoir surveillé N°4
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1.

1. Donner le chiffre des unités de $27^{43^{68}}$.
2. Trouver les entiers n vérifiant les conditions suivantes :

a) $\begin{cases} n \equiv 2 \ [28] \\ n \equiv 3 \ [49]\,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} n \equiv 257 \ [1024] \\ n \equiv 513 \ [768]\,; \end{cases}$

Solution

1. $27^2 \equiv 7^2 \pmod{10} \equiv -1 \pmod{10}$. Ainsi, $27^4 \equiv 1 \pmod{10}$. De plus, $43^2 \equiv (-1)^2 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$. Finalement, $27^{43^{68}} = 27^{4k+1} \equiv 7 \pmod{10}$, donc le chiffre des unités est 7.
2. a) $28 \wedge 49 = 7$ donc si $n = 28p + 2 = 49q + 3$ on doit avoir $7|(2-3)$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution.

   b) Soient p et q tels que $n = 1024p+257 = 768q+513$. Alors $1024p-768q = 513-257 = 256$ (*). Mais (*)$\Leftrightarrow 4p-3q = 4-3$ dont les solutions sont les couples p, q de la forme $(3k+1, 4k+1)$ pour k entier.
   Finalement, les solutions sont de la forme $n = 3072k + 1281,\ k \in \mathbb{Z}$. Reprendre les calculs en sens inverse montre que tout entier de cette forme est solution.

Exercice 2. En TD, nous avons vu les nombres de Fermat, de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ et nous avons que $F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$ sont premiers. Fermat avait conjecturé que tous les F_n étaient premiers, Euler prouva que ce n'était pas la cas. Retrouver sa preuve montrant que F_5 est un multiple de 641.
Indication : on pourra écrire $641 = 5^4 + 2^4 = 2^7 * 5 + 1$ *et raisonner modulo 641.*

Solution

Les équivalences suivantes sont modulo 641.

$$\begin{aligned} -1 &\equiv 2^7 * 5 \\ &\equiv 2^7 * 5 * (-(-1)) \\ &\equiv -2^7 * 5 * 2^7 * 5 \\ &\equiv 2^{14} * 5^2 * (-1) \\ &\equiv 2^{21} * 5^3 \\ &\equiv 2^{21} * 5^3 * (-(-1)) \\ &\equiv -2^{28} * 5^4 \\ &\equiv 2^{28} * (-5^4) \\ &\equiv 2^{28} * 2^4 \\ &\equiv 2^{32} \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que pour tout entier $x \in [\![1, p-1]\!]$ il y existe un entier $y \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $xy \equiv 1 \pmod p$.
2. Montrer que pour tout x ce y est unique.
3. Montrer que la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod p$ a précisément deux solutions comprises entre 0 et $p-1$, qu'on spécifiera.
4. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ (Ce résultat s'appelle le théorème de Wilson).

Solution

1. Soit $x \in [\![1, p-1]\!]$. Puisque p est premier, on a $p \wedge x = 1$. En application de Bézout, on a alors, pour un couple (u, v) d'entiers, $au + bv = 1$. En posant y le reste de la division euclidienne de u par p, on a déjà l'existence d'un y.
2. Soient y et y' deux solutions. On a $xy - xy' \equiv 0 \pmod p$ d'où, puisque p est premier, $p | y - y'$. Ceci implique $y = y'$.
3. Soit x une solution. On a alors $p | x^2 - 1$ donc $p | (x-1)(x+1)$ et alors, puisque p est premier, $p | x-1$ ou $p | x+1$. Il n'y a donc que deux solutions sur l'intervalle considéré, 1 et $p-1$. Elles sont bien distinctes puisque $p > 2$.
4. On peut alors grouper, dans le produit $(p-2)!$, les termes x avec les y tels que $xy \equiv 1 \pmod p$. Puisqu'il y en a un unique à chaque fois, on peut écrire
$$2 * 3 * \cdots * (p-2) \equiv 1^{\frac{p-3}{2}} \pmod p.$$
Aussi
$$(p-1)! \equiv 1^{\frac{p-1}{2}} (p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Exercice 4. On considère une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple de réels (x, y) on ait :
$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

1. Montrer qu'il existe un réel α tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(n) = \alpha n.$$
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{Z}, \Phi(k) = \alpha k$.
3. Montrer : $\forall q \in \mathbb{Q}, \Phi(q) = \alpha q$.
4. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \alpha x$.

Solution Tout cet exercice se traite comme l'exercice 8 de la feuille 10.

1. On commence par montrer par récurrence que $\Phi(x_1 + \cdots + x_n) = \Phi(x_1) + \cdots + \Phi(x_n)$, puis comme dans la feuille on écrit, pour $n \neq 0$, $n = 1 + 1 + ... + 1$ d'où le résultat avec $\alpha = \Phi(1)$. De plus, $\Phi(0) = \Phi(0+0) = \Phi(0) + \Phi(0) = 0 = 0\alpha$.
2. On écrit $\Phi(-n) + \Phi(n) = \Phi(0) = 0$ d'où le résultat.
3. On écrit, pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\Phi(\frac{p}{q}) * q = \Phi(p)$, d'où le résultat.
4. Ici on se sert de la continuité de Φ et de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels qui tend vers x (penser par exemple aux écritures décimales partielles de x, c'est-à-dire $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$). On a alors $\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha x_n = \alpha x$.

Exercice 5. On souhaite montrer qu'une fonction réelle injective et continue est nécessairement monotone. Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective.

1. Écrire sous la forme d'une propostion logique que f est monotone, ainsi que sa négation.
2. En considérant, pour $x_1,\ x_2,\ y_1$ et y_2 bien choisis, la fonction $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(t) = f((1-t)x_1 + ty_1) - f((1-t)x_2 + ty_2),$$

   montrer que f est monotone.

Solution

1. $$\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2, (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \Rightarrow ([f(x_1) < f(x_2)] \Rightarrow [f(y_1) \leqslant f(y_2)])$$

   Sa négation :

$$\exists x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2, (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ et } ([f(x_1) < f(x_2)] \text{ et } [f(y_1) > f(y_2)])$$

2. Par l'absurde, on suppose que la négation est vérifiée et on prend $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ comme dans la négation. Alors : $\phi(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0$ et $\phi(0) = f(y_1) - f(y_2) > 0$. De plus, ϕ est continue, donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe t tel que $\phi(t) = 0$. Donc :

$$f((1-t)x_1 + ty_1) - f((1-t)x_2 + ty_2).$$

   Ceci implique, par injectivité de f, que $(1-t)x_1 + ty_1 = (1-t)x_2 + ty_2$, mais on a

$$(1-t)x_1 + ty_1 < (1-t)x_2 + ty_2$$

   par hypothèse. Contradiction.