Devoir surveillé N°4
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1.

1. Donner le chiffre des unités de $27^{43^{68}}$.
2. Trouver les entiers n vérifiant les conditions suivantes :
   a) $\begin{cases} n \equiv 2\ [28] \\ n \equiv 3\ [49]\,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} n \equiv 257\ [1024] \\ n \equiv 513\ [768]\,; \end{cases}$

Exercice 2. Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que pour tout entier $x \in [1, p-1]$ il y a un entier $y \in [1, p-1]$ tel que $xy \equiv 1 \pmod p$.
2. Montrer que pour tout x ce y est unique.
3. Montrer que la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod p$ a précisément deux solutions comprises entre 0 et $p-1$, qu'on spécifiera.
4. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ (Ce résultat s'appelle le théorème de Wilson).

Exercice 3. En TD, nous avons vu les nombres de Fermat, de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ et nous avons que $F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$ sont premiers. Fermat avait conjecturé que tous les F_n étaient premiers, Euler prouva que ce n'était pas la cas. Retrouver sa preuve montrant que F_5 est un multiple de 641.
Indication : on pourra écrire $641 = 5^4 + 2^4 = 2^7 * 5 + 1$ *et raisonner modulo 641.*

Exercice 4. On considère une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple de réels (x, y) on ait :

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

1. Montrer qu'il existe un réel α tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(n) = \alpha n.$$
2. Montrer : $\forall k \in \mathbf{Z}, \Phi(k) = \alpha k$.
3. Montrer : $\forall q \in \mathbf{Q}, \Phi(q) = \alpha q$.
4. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \alpha x$.

Exercice 5. On souhaite montrer qu'une fonction réelle injective et continue est nécessairement monotone. Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective.

1. Écrire sous la forme d'une propostion logique que f est monotone, ainsi que sa négation.
2. En considérant, pour $x_1,\ x_2,\ y_1$ et y_2 bien choisis, la fonction $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\phi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2),$$
montrer que f est monotone.