Fondamentaux des mathématiques - DS n°3

Partie CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 + (8-5i)z + (4-13i) = 0$.
2. $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$.

Solution.

1. Le discriminant est

$$A + iB = \Delta = (8-5i)^2 - 4\cdot 2\cdot(4-13i) = 64 - 25 - 80i - 32 + 104i = 7 + 24i.$$

Si $\delta = a + ib$ avec $\delta^2 = \Delta$, alors

$$a^2 - b^2 = A = 7, \quad 2ab = B = 24 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25.$$

Ainsi $2a^2 = 7 + 25 = 32$ et $a = \pm 4$, d'où $b = 24/2a = \pm 3$ et $\delta = \pm(4+3i)$. Donc

$$z = \frac{-(8-5i) \pm (4+3i)}{2\cdot 2} \in \{-1+2i, -3+\frac{i}{2}\}.$$

2. Soit $z = re^{i\phi}$. Alors $\mathrm{Re}(z^3) = r^3\cos(3\phi)$ et $\mathrm{Im}(z^3) = r^3\sin(3\phi)$. Ainsi $\cos(3\phi) = \sin(3\phi)$ et $3\phi = \frac{\pi}{4}$ mod π. Donc $\phi \in \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Alors (avec $\mathbb{U}_6 = \{e^{i\frac{2k\pi}{6}} : k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des racines 6èmes de l'unité)

$$z \in \{re^{i\frac{\pi}{12}}\omega : r \geq 0,\, \omega \in \mathbb{U}_6\}.$$

Exercice 2 :

1. Montrer que si une similitude indirecte $z \mapsto a\bar{z} + b$ est une symétrie axiale, alors $|a| = 1$.
2. En déduire que la composée de deux symétries axiales de $\mathbb{C}$ est une translation ou une rotation.

Solution.

1. Une symétrie axiale f préserve les longueurs. Donc

$$|z - z'| = |f(z) - f(z')| = |(a\bar{z}+b) - (a\bar{z}'+b)| = a\,|z - z'|,$$

d'où $|a| = 1$.

2. Si $f(z) = a\bar{z} + b$ et $f'(z) = a'\bar{z} + b'$, alors

$$(f' \circ f)(z) = a'\overline{(a\bar{z}+b)} + b' = a'\bar{a}z + a'\bar{b} + b'.$$

On a $|a'\bar{a}| = |a'|\,|a| = 1$. Donc soit $a'\bar{a} = 1$ est c'est une translation, soit $a'\bar{a} \neq 1$ est c'est une rotation.

Exercice 3 : Montrer que $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Indication : Penser à la définition du logarithme.

Solution. On a $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ pour $t \in [x, x+1]$. Ainsi

$$\frac{1}{x+1} = \int_x^{x+1} \frac{dt}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x = \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{x} = \int_x^{x+1} \frac{dt}{x}.$$

Le résultat de l'exercice 3. pourra être utilisé pour les exercices 4. et 5.

__**Exercice 4 :**__ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\big) - \ln n$ et $v_n = \big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\big) - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée la constante d'Euler.
3. (Bonus) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$.

Solution.

1. On a $S_{2n+2} - S_{2n} = -u_{2n+1} + u_{2n+2} \leq 0$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$, puisque $(u_n)_n$ est décroissante. Ainsi $(S_{2n})_n$ est décroissante et $(S_{2n+1})_n$ est croissante. De plus,
$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} -(-u_{2n+1}) = 0.$$
Ainsi les deux suites sont adjacentes, et convergent vers une même limite ℓ d'après le théorème des suites adjacentes. Puisque $(S_n)_n = (S_{2n})_n \cup (S_{2n+1})_n$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$.
2. On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0, \quad \text{et} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0, \end{aligned}$$
d'après l'exercice 3. Ainsi $(u_n)_n$ est décroissant et $(v_n)_n$ est croissant. De plus,
$$0 \leq u_n - v_n = -\ln n + \ln(n+1) \leq \frac{1}{n} \to 0.$$
Ainsi les deux suites sont adjacentes, et convergent vers une même limite γ d'après le théorème des suites adjacentes.
3. La suite $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ converge d'après la partie 1, puisque $(\frac{1}{n})_{n>0}$ est une suite décroissante de limite nulle. Or,
$$\begin{aligned} w_{2n} &= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\ &= -\big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\big) + \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\big) - (\ln 2 + \ln n) + \ln n \\ &\to -\gamma + \gamma - \ln 2 + 0 = -\ln 2. \end{aligned}$$

__**Exercice 5 :**__

1. Étudier le signe de $f : x \mapsto (x-1)\ln(1+x) - x\ln x$ sur $[1, \infty[$.
2. Soit $\varphi : x \mapsto \ln(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Déduire de la question 1. les variations de φ sur $[1, \infty[$.
   (b) Déterminer les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \varphi(\frac{1}{x})$.
3. En déduire que pour tous $a, b > 0$ on a $\ln(1+\frac{a}{b})\ln(1+\frac{b}{a}) \leq (\ln 2)^2$.

Solution.

1. On a pour $x > 1$
$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x-1}{1+x} - \ln x - \frac{x}{x} = \ln(1+x) - \ln x - \frac{2}{1+x} \leq \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x} = \frac{x+1-2x}{x(1+x)} = \frac{1-x}{x(1+x)} < 0.$$
Ainsi f est strictement décroissant sur $[1, \infty[$. On a $f(1) = 0$. Donc f est négatif pour $x > 1$.

2. On a pour $x > 1$

$$\varphi'(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1+x} + \ln(1+x)\frac{-x^{-2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x\ln(\frac{1+x}{x}) - \ln(1+x)}{x\,(1+x)}$$
$$= \frac{x(\ln(1+x) - \ln x) - \ln(1+x)}{x\,(1+x)} = \frac{(x-1)\ln(1+x) - x\ln x}{x\,(1+x)} = \frac{f(x)}{x\,(1+x)} < 0.$$

De plus, $\varphi'(1) = 0$, et pour $0 < x < 1$ on a $\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{x})$ et $\frac{1}{x} > 1$. Ainsi

$$\varphi'(x) = (\varphi(\frac{1}{x}))' = \varphi'(\frac{1}{x})\,(-x^{-2}) > 0.$$

Donc φ est strictement croissant en $]0,1]$, et strictement décroissant en $[1,\infty[$.

3. φ atteint donc son maximum en 1, ce qui veut dire que pour tout $a, b > 0$ on a

$$\ln(1+\frac{a}{b})\ln(1+\frac{b}{a}) = \varphi(\frac{a}{b}) \le \varphi(1) = (\ln 2)^2.$$