Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
Partie CUPGE

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 + (8-5i)z + (4-13i) = 0$.
2. $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$.

Exercice 2 :

1. Montrer que si une similitude indirecte $z \mapsto a\bar{z} + b$ est une symétrie axiale, alors $|a| = 1$.
2. En déduire que la composée de deux symétries axiales de $\mathbb{C}$ est une translation ou une rotation.

Exercice 3 : Montrer que $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Indication : Penser à la définition du logarithme.

Le résultat de l'exercice 3. pourra être utilisé pour les exercices 4. et 5. même si vous ne l'avez pas fait.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée la constante d'Euler.
3. (Bonus) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 5 :

1. Étudier le signe de $x \mapsto (x-1)\ln(1+x) - x\ln x$ sur $[1, \infty[$.
2. Soit $\varphi : x \mapsto \ln(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Déduire de la question 1. les variations de φ sur $[1, \infty[$.
   (b) Déterminer les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \varphi(\frac{1}{x})$.
3. En déduire que pour tous $a, b > 0$ on a $\ln(1+\frac{a}{b})\ln(1+\frac{b}{a}) \leq (\ln 2)^2$.