Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 4 novembre 2020

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1
Introduisons la fonction f définie par :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\arctan(t)}{t} \end{array}$$

1. Donner la parité de f.
2. En étudiant les applications $t \mapsto \arctan(t) - t$ et $t \mapsto \arctan(t) - t + t^3/3$ définies sur $\mathbb{R}$, justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\arctan(t) - t| \leqslant \frac{|t|^3}{3}$.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$. On note a cette limite.
   On définit $\tilde{f}$ de la façon suivante : $\tilde{f}(0) = a$ et $\tilde{f}(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}^*$.
   Justifier que $\tilde{f}$ est continue.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et calculer $\tilde{f}'(0)$.
5. Justifier que $\tilde{f}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\tilde{f}'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = t^2\tilde{f}'(t)$. Justifier que g est dérivable et calculer la dérivée de g.
7. En déduire le signe de $\tilde{f}'$.
8. En déduire le tableau de variations complet de $\tilde{f}$ avec les limites en $\pm\infty$.

Solution :

1. f est paire. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = \frac{\arctan(-t)}{-t} = \frac{-\arctan(t)}{-t} = f(t)$.
2. On pose $f_1 : t \mapsto \arctan(t) - t$ et $f_2 : t \mapsto \arctan(t) - t + t^3/3$ définies sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont dérivables et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_1'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 = -\frac{t^2}{1+t^2}$ et $f_2'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 + t^2 = \frac{t^4}{1+t^2}$. Donc f_1 est décroissante et f_2 est croissante. Or $f_1(0) = f_2(0) = 0$.
   Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_1(t) \leqslant 0$ et $f_2(t) \geqslant 0$. Donc $|\arctan(t) - t| = t - \arctan(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
   De plus pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_2(t) \geqslant 0$ et donc $|\arctan(t) - t| = t - \arctan(t) \leqslant t^3/3 = |t^3|/3$
   On a le résultat sur $\mathbb{R}$ tout entier par parité des fonctions mises en jeu dans l'inégalité.
3. En utilisant la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$|f(t) - 1| = |\frac{\arctan(t) - t}{t}| \leqslant t^2/3$$

   Donc par le théorème des gendarmes, en faisant tendre t vers 0, on trouve que $a = 1$.
   f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions usuelles ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$. Donc $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. La continuité en 0 de $\tilde{f}$ est vraie par définition de $\tilde{f}$.

4. Le taux de variation de $\tilde{f}$ en 0 est $T_{\tilde{f}}(t) = \frac{\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)}{t} = \frac{\arctan(t)-t}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.
   Donc en utilisant la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $|T_{\tilde{f}}(t)| \leqslant t/3$.
   Par conséquent, en faisant tendre t vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que, $\tilde{f}'(0) = 0$.
5. $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions usuelles notoirement dérivables. On obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:
$$\tilde{f}'(t) = \frac{t(1+t^2)^{-1} - \arctan(t)}{t^2}$$
6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)$.
   g est dérivable car elle est issue de fonctions usuelles dérivables.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2}$.
7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) \leqslant 0$. Donc g est décroissante. Or $g(0) = 0$. Donc g est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc $\tilde{f}'$ est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$.
8. On déduit de la question 7 que $\tilde{f}$ est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\tilde{f}(0) = 1$. Enfin la limite de $\tilde{f}$ en $\pm\infty$ est 0 car la limite de arctan en $+\infty$ est $\frac{\pi}{2}$ et la limite de arctan en $-\infty$ est $-\frac{\pi}{2}$.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\tilde{f}(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les nombres complexes, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2(k)$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sin(i+j)$.

Solutions :

Tout d'abord, calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik}$.
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \frac{e^{i(n+1)}-1}{e^i - 1} = \frac{e^{i(n+1)/2}}{e^{i/2}} \times \frac{e^{i(n+1)/2} - e^{-i(n+1)/2}}{e^{i/2} - e^{-i/2}} = e^{in/2}\frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}$$

1. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \frac{\sin(n/2)\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}$
2. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos^2(k) = \frac{1}{2}(\cos(2k)+1)$.
   En outre, on peut montrer comme ci-dessus que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i2k} = e^{in}\frac{\sin(n+1)}{\sin(1)}$.
   Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\cos(2k)+1) = \frac{n+1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ik}\right) = \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(n)\sin(n+1)}{2\sin(1)}$.
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \sin(i+j) = \mathrm{Im}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} e^{i+j}\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\sum_{i=0}^{n} e^{i}\right]^2\right) = \mathrm{Im}\left(e^{in} \times \frac{\sin^2((n+1)/2)}{\sin^2(1/2)}\right)$
   Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \sin(i+j) = \frac{\sin(n)\sin^2((n+1)/2)}{\sin^2(1/2)}$.

—————————————————————————————————————

Exercice 3
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$.
On définit $u_0 = a$ et $v_0 = b$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $v_n - u_n \leqslant \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que ces deux suites admettent une limite commune qu'on notera $\mathcal{M}(a,b)$.
4. Donner $\mathcal{M}(a,a)$ et $\mathcal{M}(a,0)$ si $a \in \mathbb{R}_+$.
5. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(b,a)$.

Solutions :

1. Tout d'abord on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ (et les deux suites sont bien définies.) Cela peut se prouver de manière élémentaire par récurrence.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - v_n^2 = u_{n-1}v_{n-1} - \frac{u_{n-1}^2}{4} - \frac{v_{n-1}^2}{4} - \frac{u_{n-1}v_{n-1}}{2} = -(u_{n-1} - v_{n-1})^2/4 \leqslant 0$.
2. On procède par récurrence.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n =$ "$v_n - u_n \leqslant \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$".
   Initialisation : H_n est vraie par définition.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie.
   $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}$.
   Or $\sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n u_n} = u_n$.
   Donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant \frac{v_1 - u_1}{2^n}$.
   Le principe de récurrence permet de conclure.

3. La suite v est décroissante à partir du rang 1 et la suite u est croissante à partir du rang 1.
   En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$ d'après 1).
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n \geqslant \sqrt{u_n u_n} - u_n = 0$ d'après 1).
   La différence entre les deux suites converge vers 0 en utilisant le théorème des gendarmes et les deux questions précédentes.
   Les suites sont donc adjacentes et on en déduit le résultat.
4. $\mathcal{M}(a,a) = a$ et $\mathcal{M}(a,0) = 0$.
5. Soit (u,v) le couple de suites associées à (a,b) et $(\tilde{u},\tilde{v})$ le couple de suites associées à (b,a). On note que $u_1 = \tilde{u}_1$ et $v_1 = \tilde{v}_1$. Comme les relations de récurrence sont les mêmes, on a $u_n = \tilde{u}_n$ et $v_n = \tilde{v}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc les limites sont les mêmes et donc $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(b,a)$.

—————————————————————————————————————

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + (1+i)z - 2 = 0$ 2. $4z^2 - 3|z^2| - 1 = 0$ 3. $z^2 + \bar{z}^2 - z^3 = 0$.

Solutions :

1. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (1+i)^2 + 8 = 2(4+i)$.
   Cherchons d'abord les racines (complexes) de $4+i$.
   Notons $a+ib$ une des deux racines de $4+i$. Par définition $(a+ib)^2 = 4+i$.
   Donc $a^2 - b^2 = 4$ et $2ab = 1$. On en déduit que $a^4 - 4a^2 - 1/4 = 0$. Donc a^2 est solution du tribôme (à coefficients réels !) $X^2 - 4X - 1/4$. Donc $a^2 = \frac{4+\sqrt{17}}{2}$. Donc $b^2 = a^2 - 4 = \frac{\sqrt{17}-4}{2}$.
   Par ailleurs, comme $2ab = 1$, a et b sont de même signe. Donc $\delta = \sqrt{2} \times \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2}} \right) =$ $\sqrt{\sqrt{17}+4} + i\sqrt{\sqrt{17}-4}$ est une racine de Δ.
   Les solutions de l'équation sont donc $\dfrac{-(1+i) \pm \delta}{2}$.

2. On va procéder par analyse-synthèse :
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $4z^2 - 3|z|^2 - 1 = 0$.
   Donc $4z^2 = 3|z|^2 + 1$. En prenant le module à gauche et à droite, on obtient que $4|z|^2 = 3|z|^2 + 1$ et donc $|z| = 1$.
   Donc $4z^2 - 4 = 0$. Donc $z = \pm 1$.
   Réciproquement, on peut vérifier que 1 et -1 sont bien des solutions.
3. On va procéder par analyse-synthèse.
   0 est clairement solution. Donc va résoudre l'équation dans $\mathbb{C}^*$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z^2 + \bar{z}^2 = z^3$.
   Il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = re^{i\theta}$.
   On trouve alors que $r^2 e^{2i\theta} + r^2 e^{-2i\theta} = r^3 e^{3i\theta}$.
   Par conséquent $2\cos(2\theta) = re^{3i\theta}$. Donc $e^{3i\theta} \in \mathbb{R}$.
   Ainsi $3\theta \equiv 0[\pi]$. Donc $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.
   Ainsi $r = \frac{2|\cos(2\theta)|}{|\cos(3\theta)|} = 2|\cos(2\theta)|$.
   Cela nous donne donc 6 candidats pour être solution de l'équation.
   Procédons ainsi à la synthèse.
   Pour qu'un complexe du type $re^{i\theta}$ avec $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ et $r = 2|\cos(2\theta)|$ soit effectivement solution, il faut que $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ soient de même signe. l'étude des 6 cas montre que cela n'arrive que pour $\theta \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.
   Finalement nous avons trouvé 3 solutions dans $\mathbb{C}^*$ auxquelles il faut ajouter la solution 0.