Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 4 novembre 2020

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1
Introduisons la fonction f définie par :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\arctan(t)}{t} \end{array}$$

1. Donner la parité de f.
2. En étudiant les applications $t \mapsto \arctan(t) - t$ et $t \mapsto \arctan(t) - t + t^3/3$ définies sur $\mathbb{R}$, justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\arctan(t) - t| \leqslant \frac{|t|^3}{3}$.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$. On note a cette limite.
   On définit $\tilde{f}$ de la façon suivante : $\tilde{f}(0) = a$ et $\tilde{f}(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}^*$.
   Justifier que $\tilde{f}$ est continue.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et calculer $\tilde{f}'(0)$.
5. Justifier que $\tilde{f}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\tilde{f}'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = t^2 \tilde{f}'(t)$. Justifier que g est dérivable et calculer la dérivée de g.
7. En déduire le signe de $\tilde{f}'$.
8. En déduire le tableau de variations complet de $\tilde{f}$ avec les limites en $\pm\infty$.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les nombres complexes, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k)$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k)$ 3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \sin(i+j)$

Exercice 3
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.
On définit $u_0 = a$ et $v_0 = b$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $v_n - u_n \leqslant \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que ces deux suites admettent une limite commune qu'on notera $\mathcal{M}(a, b)$.
4. Donner $\mathcal{M}(a, a)$ et $\mathcal{M}(a, 0)$ si $a \in \mathbb{R}_+$.
5. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(b, a)$.

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + (1 + i)z - 2 = 0$ 2. $4z^2 - 3|z^2| - 1 = 0$ 3. $z^5 + \bar{z}^5 + z^7 = 0.$