Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 — 14 octobre 2020

Devoir surveillé N°2
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1
Déterminer (s'ils existent) : la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

a) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cap \mathbb{Q}\right)$.

b) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{m}{n+m}, (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.

c) $\left\{\arctan\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.

d) $\left\{e^{-m} + 1, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercice 2
Soit $I_n = \{1, 2..., n\}$, $\mathcal{P}(I_n)$ l'ensemble des parties de I_n.

1. Donner $\mathcal{P}(I_n)$ pour $n = 3$.

2. On définie une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(I_n)$ comme suit :

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

   a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(I_n)$.
   b) Soit $A \in \mathcal{P}(I_n)$, $\mathrm{Card}(A) = k \leq n$. Calculer le cardinal de $\left\{B \in \mathcal{P}(I_n), A\mathcal{R}B\right\}$.

3. Calculer le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\left\{A \in \mathcal{P}(I_n) \mid i \in A \Leftrightarrow \ n - i \in A\right\}.$$

Exerice 3
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont le terme général est donné par :

a) $u_n = \dfrac{n}{\ln(cos^2(n) + 3)}$.

b) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2 + k + 1}$.

d) $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 4

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^{-x}x+1)}{x} = 1$.

2) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x + e^x$.

a) Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.

b) Montrer qu'il existe un seul $\alpha \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $h(x) = 0$, puis que $\alpha \in]-1, 0[$.

3) Soit $f :]\alpha, \infty[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x+e^x)}{x}$.

a) Calculer la limite de f en α et $+\infty$.

b) En utilisant la question 1. calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4) Dans le reste de l'exercice, on admet que la fonction f est bien définie sur $]\alpha, \infty[$ tout entier, qu'elle est dérivable et que $f'(x) < 0$, $\forall x \in]\alpha, \infty[$.

a) Dessiner le graphe de f.

b) Montrer que f réalise une bijection entre $]\alpha, \infty[$ et un intervalle I de $\mathbb{R}$ à déterminer.