Fondamentaux des mathématiques - DS n°2

Partie CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour tout $y\in\mathbb{R}$ on pose $f^*(y)=\sup_{x\geq y} f(x)$.

1. Déterminer f^* dans le cas où f est décroissante.
2. Étudier la monotonie de f^* dans le cas général.
3. En déduire l'existence de $\lim_{y\to\infty} f^*(y)$. Il s'appelle $\limsup_{x\to\infty} f(x)$.
4. (Bonus) Soit $\ell=\limsup_{x\to\infty} f(x)$.
   (a) Montrer que $\forall\,\epsilon>0\ \exists r\in\mathbb{R}\ \forall x\geq r,\ f(x)<\ell+\epsilon$.
   (b) Montrer que $\forall\,\epsilon>0\ \forall\,r\in\mathbb{R}\ \exists\,x\geq r,\ f(x)\geq\ell-\epsilon$.

Solution.

1. Notons d'abord que $\sup_{x\geq y} f(x)$ existe puisque f est majorée (par l'axiome de la borne supérieure). Si f est décroissante, $f(y)\geq f(x)$ pour $y\leq x$, et donc $f^*(y)=f(y)$.
2. Si $y\leq y'$, alors $\{x\in\mathbb{R}: x\geq y\}\supseteq\{x\in\mathbb{R}: x\geq y'\}$ et donc $\sup_{x\geq y} f(x)\geq\sup_{x\geq y'} f(x)$. Ainsi f^* est décroissante.
3. Puisque tout minorant de f minore aussi f^*, et f^* est décroissante, $\lim_{y\to\infty} f^*(y)$ existe.
4. (a) Soit $\epsilon>0$. Supposons que pour tout $r\in\mathbb{R}$ il y a $x\geq r$ avec $f(x)\geq\ell+\epsilon$. Alors $f^*(r)\geq\ell+\epsilon$, ce qui implique
   $$\ell=\limsup_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to\infty} f^*(y)\geq\ell+\epsilon,$$
   une contradiction. Ainsi $\forall\,\epsilon>0\ \exists r\in\mathbb{R}\ \forall x\geq r,\ f(x)<\ell+\epsilon$ est vrai.
   (b) Soit $\epsilon>0$. Supposons que $r\in\mathbb{R}$est tel que $f(x)<\ell-\epsilon$ pour tout $x\geq r$. Alors $f^*(r')\leq\ell-\epsilon$ pour tout $r'\geq r$, et
   $$\ell=\limsup_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to\infty} f^*(y)\leq\ell-\epsilon,$$
   une contradiction. Ainsi $\forall\,\epsilon>0\ \forall\,r\in\mathbb{R}\ \exists\,x\geq r,\ f(x)\geq\ell-\epsilon$.

Exercice 2 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n u_i$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ, la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ. Est-ce que la réciproque est vraie ?
2. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est bornée, la suite $(v_n)_n$ est bornée. Est-ce que la réciproque est vraie ?
3. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est croissante, alors la suite $(v_n)_n$ aussi.
4. (Bonus) Montrer que si la suite $(v_n)_n$ converge et si $(u_n)_n$ est monotone, alors la suite $(u_n)_n$ converge.

Si $(v_n)_n$ converge, on dit que$(u_n)_n$ converge *au sens de Césaro.*

Solution.

1. Soit $\epsilon>0$, et $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geq N$ on a $|u_n-\ell|\leq\frac{\epsilon}{2}$. Soit $d=|N\ell-\sum_{i<N}u_i|$, et $M\geq N$ un entier tel que $d/M\leq\frac{\epsilon}{2}$. Alors pour $n\geq M$ on a
   $$\begin{aligned}|v_n-\ell|&=\Big|(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n u_i)-\ell\Big|=\Big|\frac{\sum_{i=0}^n u_i-(n+1)\ell}{n+1}\Big|=\Big|\frac{(\sum_{i=0}^{N-1}u_i)-N\ell+\sum_{i=N}^n(u_i-\ell)}{n+1}\Big|\\&\leq\Big|\frac{d}{n+1}\Big|+\Big|\frac{(n-N+1)\frac{\epsilon}{2}}{n+1}\Big|\leq\Big|\frac{d}{M}\Big|+\frac{\epsilon}{2}\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$
   Ainsi $(v_n)_n$ converge vers ℓ.
   Soit maintenant $u_n=(-1)^n$. Alors $v_n=\frac{1}{n+1}$ pour n pair, et $v_n=0$ pour n impair. Ainsi $(v_n)_n$ converge vers 0, mais $(u_n)_n$ est divergente et bornée.

2. Si $|u_n| \leq a$ pour tout n, alors

$$|v_n| = \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_n\Big| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a = a,$$

et $(v_n)_n$ est bornée.
Soit $u_n = (-1)^n[n/2]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x. Alors $v_n = 0$ pour n impair, et $v_n = (-1)^n\frac{[n/2]}{n+1}$ pour n pair. Ainsi $(v_n)_n$ est bornée par 1, mais $(u_n)_n$ ne l'est pas.

3. Si $(u_n)_n$ est croissante, alors $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_n = u_n$. Alors

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{n+2}[(n+2)v_{n+1}-(n+1)v_n-v_n] = \frac{1}{n+2}\Big[\sum_{i=0}^{n+1} u_i - \sum_{i=0}^{n} u_i - v_n\Big] = \frac{u_{n+1}-v_n}{n+2} \geq \frac{u_{n+1}-u_n}{n+2} \geq 0.$$

Ainsi $(v_n)_n$ est croissante.

4. Quitte à remplacer $(u_n)_n$ par $(-u_n)_n$, on peut supposer que $(u_n)_n$ est croissante. Si $(u_n)_n$ ne converge pas, elle diverge donc vers ∞. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - \ell| \leq 1$ et $u_n \geq \ell + 2$ pour $n \geq N$. Soit $d = (\sum_{i<N} u_i) - N(\ell+1)$, et $M \geq N - d$. Alors pour $n \geq M$ on a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} u_i + \sum_{i=N}^{n} u_i}{n+1} \geq \frac{d + N(\ell+1) + \sum_{i=N}^{n}(\ell+2)}{n+2} \\ &\geq \frac{d + N(\ell+1) + (n-N+1)(\ell+2)}{n+2} = \frac{(n+1)(\ell+1) + d + n + 1 - N}{n+1} \geq \ell + 1, \end{aligned}$$

puisque $d+n+1-N \geq d+M+1-N \geq 0$. Ceci contredit $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$. Ainsi $(u_n)_n$ converge (vers ℓ d'après 1.).

<u>**Exercice 3 :**</u> Étudier la fonction

$$x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$$

(domaine maximale de définition, parité, périodicité, continuité, dérivabilité, calcul de la fonction dérivée, limites aux bornes du domaine maximal, tableau des variations, asymptotes, graphe).

Solution. Il faut $x \neq 0$ et $\ln|x|$ de même signe que x. Ainsi le domaine maximal est $[-1, 0[\cup[1, \infty[$. Sur son domaine f est continue et dérivable comme composition de fonctions continues et dérivables. De plus, f est ni périodique, ni paire ni impaire.

On calcule la fonction dérivée.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}}\,\frac{(\frac{\mathrm{sgn}(x)}{|x|}\,x) - \ln|x|}{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\ln|x|}}\,\frac{1-\ln|x|}{x^2} = \frac{1-\ln|x|}{2\,|x|\,\sqrt{x\ln|x|}}.$$

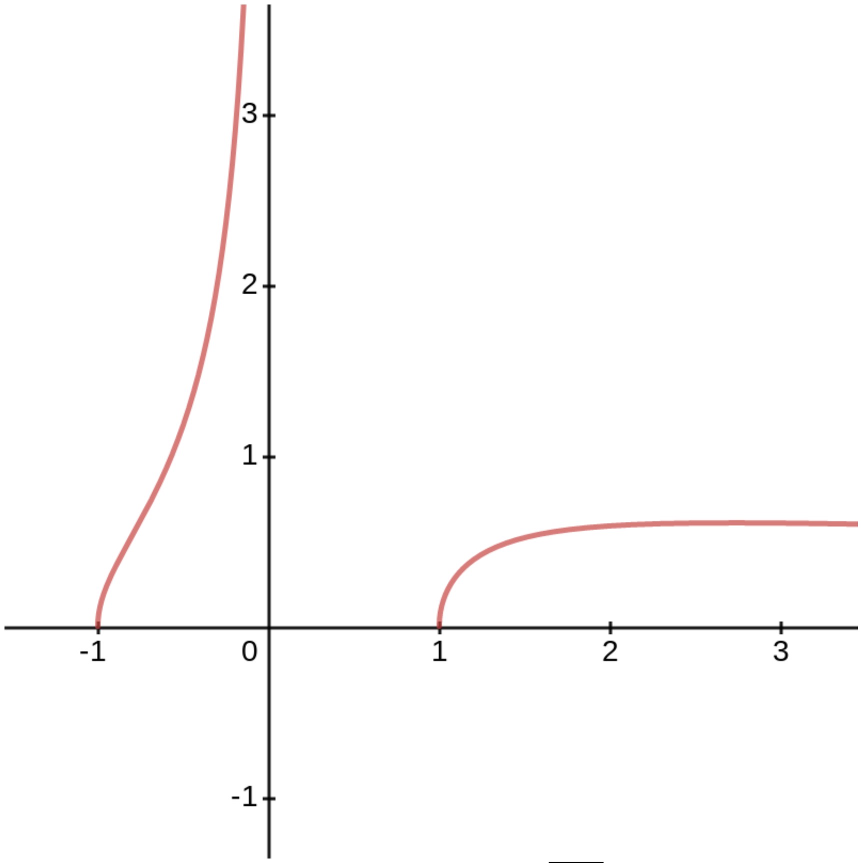
On a $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 0$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}} = 0.$$

Ceci donne le tableau des variations :

x	-1		0		1		e		∞
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	∞	$\|\|$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

Il y a un maximum en $x = e$, et des asymptotes $x = 0$ en 0 et $y = 0$ en ∞.



Le graphe de $f(x) = \sqrt{\frac{\ln |x|}{x}}$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f''(x) + f(x) \geq 0$. Étudier les variations de

$$g : t \mapsto f'(t) \sin(t - x) - f(t) \cos(t - x).$$

En déduire que $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Puisque f est deux fois dérivable, g est une fois dérivable, et

$$g'(t) = f''(t) \sin(t - x) + f'(t) \cos(t - x) - f'(t) \cos(t - x) + f(t) \sin(t - x) = (f''(t) + f(t)) \sin(t - x).$$

Or, $f''(t) + f(t) \geq 0$. Ainsi $g'(t)$ a le même signe que $\sin(t - x)$, et $g'(t) \geq 0$ pour $t \in [x, x + \pi] \mod 2\pi$, et $g'(t) \leq 0$ pour $t \in [x - \pi, x] \mod 2\pi$.

En particulier, g est croissante dans l'intervalle $[x, x + \pi]$. Donc

$$g(x) = -f(x) \leq g(x + \pi) = f(x + \pi).$$

Ceci donne $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

Exercice 5 : Soit $f : X \to X$ une application.

1. Montrer que f est injective ssi pour tout $Y \subseteq X$ on a $f^{-1}[f[Y]] = Y$.
2. Montrer que f est surjective ssi pour tout $Y \subseteq X$ on a $f[f^{-1}[Y]] = Y$.

Solution.

1. Soit f injective, et $Y \subseteq X$. Si $x \in Y$, alors $f(x) \in f[Y]$ et $x \in f^{-1}[f[Y]]$. Donc $Y \subseteq f^{-1}[f[Y]]$. Inversement, soit $x \in f^{-1}[f[Y]]$. Alors $f(x) \in f[Y]$, et il y a $y \in Y$ avec $f(x) = f(y)$. Par injectivité, $x = y \in Y$. Donc $f^{-1}[f[Y]] \subseteq Y$, et on a égalité.

   Réciproquement, supposons $f^{-1}[f[Y]] = Y$ pour tout $Y \subseteq X$, et considérons $x, y \in X$ avec $f(x) = f(y)$. On pose $Y = \{y\}$. Alors $x \in f^{-1}[f[Y]] = Y = \{y\}$, ce qui donne $x = y$. Ainsi $f$est injective.
2. Soit f surjective, et $Y \subseteq X$. Si $x \in f[f^{-1}[Y]]$, alors $x = f(y)$ pour un $y \in f^{-1}[Y]$, ce qui implique $x = f(y) \in Y$ et $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$. Inversement, soit $y \in Y$. Comme f est surjective, il y a $x \in X$ avec $f(x) = y$, et $x \in f^{-1}[Y]$. Alors $y = f(x) \in f[f^{-1}[Y]]$. Donc $Y \subseteq f[f^{-1}[Y]]$, et on a égalité.

   Réciproquement, supposons $f[f^{-1}[Y]] = Y$ pour tout $Y \subseteq X$. En particulier $\operatorname{im} f \supseteq f[f^{-1}[Y]] = Y$, et f est surjective.