# Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
## Partie CUPGE

**Exercice 1 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on pose $f^*(y) = \sup_{x \geq y} f(x)$.

1. Déterminer $f^*$ dans le cas où $f$ est décroissante.
2. Étudier la monotonie de $f^*$ dans le cas général.
3. En déduire l'existence de $\lim_{y\to\infty} f^*(y)$. Il s'appelle $\limsup_{x\to\infty} f(x)$.
4. (Bonus) Soit $\ell = \limsup_{x\to\infty} f(x)$.
   (a) Montrer que $\forall \epsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{R}\ \forall x \geq r,\ f(x) < \ell + \epsilon$.
   (b) Montrer que $\forall \epsilon > 0\ \forall r \in \mathbb{R}\ \exists x \geq r,\ f(x) \geq \ell - \epsilon$.

**Exercice 2 :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel $\ell$, la suite $(v_n)_n$ converge vers $\ell$. Est-ce que la réciproque est vraie ?
2. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est bornée, la suite $(v_n)_n$ est bornée. Est-ce que la réciproque est vraie ?
3. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est croissante, alors la suite $(v_n)_n$ aussi.
4. (Bonus) Montrer que si la suite $(v_n)_n$ converge et si $(u_n)_n$ est monotone, alors la suite $(u_n)_n$ converge.

Si $(v_n)_n$ converge, on dit que$(u_n)_n$ converge *au sens de Césaro.*

**Exercice 3 :** Étudier la fonction

$$x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$$

(domaine maximale de définition, parité, périodicité, continuité, dérivabilité, calcul de la fonction dérivée, limites aux bornes du domaine maximal, tableau des variations, asymptotes, graphe).

**Exercice 4 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f''(x) + f(x) \geq 0$. Étudier les variations de

$$g : t \mapsto f'(t)\sin(t-x) - f(t)\cos(t-x).$$

En déduire que $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 5 :** Soit $f : X \to X$ une application.

1. Montrer que $f$ est injective ssi pour tout $Y \subseteq X$ on a $f^{-1}[f[Y]] = Y$.
2. Montrer que $f$ est surjective ssi pour tout $Y \subseteq X$ on a $f[f^{-1}[Y]] = Y$.