Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
PARTIE CUPGE

Exercice 1 : Montrer que pour toutes propositions P et Q, les énoncés suivants sont équivalents :

$$P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \text{et} \quad P \Rightarrow Q.$$

Exercice 2 : L'énoncé suivant est-il vrai ? Si oui, le justifier (sans démonstration) ; si non, donner un contre-exemple.

$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ \{[X \neq \emptyset \text{ et } \exists a \in \mathbb{R}\ (\forall x \in X,\ x \leq a)] \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}\ [(\forall x \in X,\ x \leq b) \text{ et } (\forall \epsilon > 0\ \exists x \in X,\ b-\epsilon < x)]\}.$

Donner sa négation.
[Indication : L'énoncé est bien connu et a figuré dans le cours.]

Exercice 3 : Montrer que pour $x \neq 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} \sinh(kx) = \frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x) - \cosh(\frac{x}{2})}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}.$$

[Indication : Il suffit de connaître les définitions de sinh et cosh — et de sommer.]

Exercice 4 : On rappelle qu'une suite arithmétique est une suite telle que $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique qui ne s'annule pas, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k\, u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0\, u_{n+1}}.$$

[Indication : Soit $d = u_{n+1} - u_n$ la différence constante. Calculer $\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{u_k\, u_{k+1}}$.]

Exercice 5 : Étudier la fonction réelle f définie par

$$f(x) = x \exp(\frac{2x}{x^2 - 1}).$$

(Donner son domaine maximal, étudier sa continuité et dérivabilité, ses limites à $\pm\infty$ et aux bornes de son domaine, ses asymptotes affines éventuelles, son tableau des variations, et dresser son graphe.)