Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 23 septembre 2020

Corrigé Devoir surveillé N°1
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Calculer $\prod_{k=0}^{n} 2^{(k+1)^2}$.
2. Calculer $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.
3. Soit la suite $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 2n.$$

   (a) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et obtient une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer le terme général de v_n.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} v_k$.
   (c) Calculer la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$.
   (d) En déduire le terme général de u_n.

Solution :

1. Notons que $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Donc,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} 2^{(k+1)^2} &= 2^{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2} = 2^{\sum_{k=0}^{n}(k^2+2k+1)} \\ &= 2^{\sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1} = 2^{\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)} \\ &= 2^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)} \\ &= 2^{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}.\end{aligned}$$

2. On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4}.\end{aligned}$$

3. (a) Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = u_{n+1} - u_n = 2n.$$
(b) On en déduit que
$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} 2k = 2 \times \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1).$$
(c) On voit que
$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1}.$$
(d) Puisque $v_k = u_{k+1} - u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} v_k = n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}.$$
On en déduit que
$$u_n = (n-1)n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
avec $u_0 = 0$. Donc, $u_n = (n-1)n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

1. Quel est le domaine de définition maximal pour f.
2. Donner les limites de f aux bornes de ce domaine de définition.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. On définit la fonction
$$\begin{aligned} g: \ & [0, \infty[\to]0, 1] \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$
Monter que g est bijective.
6. Déterminer tous les réels x tels que $f(x) \geq 2/3$.

Solution :

1. On voit que $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc le domaine de définition maximal pour f est $\mathbb{R}$.
2. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$
Lorsque x tend vers $-\infty$, on a
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$
3. f est dériable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est
$$f'(x) = \frac{(x^2+x+1) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$
4. On note que le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x(x+2)$. Donc, on a

x	$-\infty$	$]-\infty, -2[$	-2	$]-2, 0[$	0	$]0, +\infty[$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. Notons que $f'(x) = g'(x) < 0$ pour $x \in]0, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante sur $[0, \infty[$. De plus, $g(0) = f(0) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ainsi, on conclut que $g : [0, \infty[\to]0, 1]$ est bijective.
6. Notons que $f(x) \geq \frac{2}{3}$ est équivalent que
$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3} \geq 0.$$
Ceci nous donne $\frac{-2x^2+x+1}{3(x^2+x+1)} \geq 0$. Puisque $x^2+x+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient
$$-2x^2 + x + 1 \geq 0.$$
Notons que $-2x^2+x+1 = -(x-1)(2x+1)$. Donc, on a $\underline{-\frac{1}{2} \leq x \leq 1}$.

Exercice 3

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

1. Est-ce que $f \circ f$ est bien définie ? Si oui, calculer $f \circ f(x)$ dans son domaine de définition.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} :\ & \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ & x \mapsto \frac{x}{nx+1} \end{aligned}$$

Solution :

1. $f \circ f$ est bien définie. En effet, pour tout $x > 0$, $f(x)$ est bien définie et $f(x) > 0$. De plus, parce que l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de définition de f, $f \circ f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est bien définie. On voit que pour tout $x > 0$,
$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}.$$
2. On va montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(P_n) : \qquad \begin{aligned} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} :\ & \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ & x \mapsto \frac{x}{nx+1}. \end{aligned}$$
-Initialisation : Pour $n = 1$, on a $f(x) = \frac{x}{x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
-Hérédité : Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet, on a que $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{(n+1) \text{ fois}} = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}) \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{(n+1) \text{ fois}}(x) =& \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(y)|_{y=f(x)} \\ =& \frac{y}{ny+1}|_{y=f(x)} \text{ par } (P_n) \\ =& \frac{f(x)}{nf(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{n\frac{x}{x+1}+1} \\ =& \frac{x}{(n+1)x+1}. \end{aligned}$$
-Conclusion : On donc conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (P_n) est vrai.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note C_n la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ et D_n la droite d'équation $y = 1 + nx$. Autrement dit,

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (1+x)^n = y\} \text{ et } D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1 + nx\}.$$

1. Rappeler l'équation de la tangente à C_n au point A de C_n d'abscisse 0.
2. Déterminez si les questions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse (avec une preuve, ou avec un exemple/contre-exemple). Dans le cas où elles sont fausses, donner la négation.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$;
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n = 1 + nx$;
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n = 1 + nx$;

Solution :

1. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = 1 + nx$.
2. (a) **Faux.** La négation est
$$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n < 1 + nx.$$
   L'assertion (a) est fausse car sa négation est vraie. En effet, on peut prendre $n = 3$ et $x = -4$ et on a $(1+x)^n = -27 < 1 + nx = -11$.
   (b) **Vrai.** Si on prend $n = 1$, on a $(1+x)^n = 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) **Vrai.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on prend $x = 0$, on a $(1+x)^n = 1 + nx$.