Un critère de convergence

Théorème. Soit $u = (u_n)_n$ une suite réelle. Un suppose que u possède des suites extraites $u \circ f_1, u \circ f_2, \ldots, u \circ f_n$ (où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ strictement croissantes) telles que :

1. toutes les suites $u \circ f_i$ convergent vers une même limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, et
2. $\mathbb{N} \setminus (\mathrm{im}(f_1) \cup \cdots \cup \mathrm{im}(f_n))$ is finite.

Then u converges vers ℓ.

Démonstration : D'après l'hypothèse 2. il y a un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$[\![N_0, \infty]\!] \subseteq (\mathrm{im}(f_1) \cup \cdots \cup \mathrm{im}(f_n)).$$

On suppose d'abord $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque toutes les suites $u \circ f_i$ convergent vers ℓ, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $i = 1, \ldots, n$ on a pour tout $k \geq N$ que

$$|u_{f_i(k)} - \ell| \leq \epsilon.$$

Soit $M = \max\{N_0, f_1(N), \ldots, f_n(N)\}$. Pour $m \geq M$ il y a donc $i \in [\![1, n]\!]$ avec $m \in \mathrm{im}(f_i)$. Alors il y a un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = f_i(k)$. Or, f_i est croissant et $f_i(k) = m \geq M \geq f_i(N)$. Ainsi $k \geq N$, et on a

$$|u_m - \ell| = |u_{f_i(k)} - \ell| \leq \epsilon.$$

Cela signifie que $(u_m)_m$ converge vers ℓ.

Maintenant on suppose $\ell = \infty$. Soit $r \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $i = 1, \ldots, n$ et tout $k \geq N$ on a

$$u_{f_i(k)} \geq r.$$

Alors pour M, m, i et k comme ci-dessus on a toujours $k \geq N$, et donc

$$u_m = u_{f_i(k)} \geq r.$$

Ainsi u converge vers ∞.

La démonstration pour $\ell = -\infty$ est analogue (ou bien on considère $-u$). $\square$