Contrôle terminal 16 Décembre 2020

Exercice 1.

1. Donner les valeurs complexes qui vérifient $z^{2n+1}+1=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation
$$1-z+z^2-z^3+\cdots-z^{2n-1}+z^{2n}=0$$

Correction exercice 1

1. Soit $z\in\mathbb{C}$
$$z^{2n+1}+1=0\Leftrightarrow z^{2n+1}=-1\Leftrightarrow z^{2n+1}=e^{i\pi}\Leftrightarrow z^{2n+1}=\left(e^{\frac{i\pi}{2n+1}}\right)^{2n+1}\Leftrightarrow\left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n+1}}}\right)^{2n+1}=1$$
Les valeurs de $\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n+1}}}$ sont les racines $2n+1$-ième de 1, c'est-à-dire
$$e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}},k\in\{0,1,\dots 2n\}$$
On en déduit que les solutions de $z^{2n+1}+1=0$ sont
$$e^{\frac{i\pi}{2n+1}}e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}=e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n+1}},k\in\{0,1,\dots 2n\}$$
2. Soit $z\in\mathbb{C}$
$$1-z+z^2-z^3+\cdots-z^{2n-1}+z^{2n}=1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+\cdots+(-z)^{2n-1}+(-z)^{2n}$$
Alors pour $z\neq-1$
$$1-z+z^2-z^3+\cdots-z^{2n-1}+z^{2n}=\frac{1-(-z)^{2n+1}}{1-(-z)}=\frac{1+z^{2n+1}}{1+z}$$
Ce sont les complexes que l'on a trouvé à la première question où il faut enlever la solution -1, c'est-à-dire $k=2n$, car $e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2n+1}}=e^{i\pi}=-1$.
Les solutions de l'équation sont
$$e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n+1}},k\in\{0,1,\dots,2n-1\}$$

Exercice 2.

1. Sans les calculer, montrer l'existence de deux entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels
$$13a+10b=1$$
2. Expliciter deux entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$, pour lesquels $13a+10b=1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation suivante, d'inconnue (x,y) : $13x+10y=1$
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation suivante, d'inconnue u : $20u\equiv 2\ [13]$.

Correction exercice 2

1. 13 et 10 sont premiers entre eux, il existe une relation de Bézout entre 13 et 10.
2. Soit on utilise l'algorithme d'Euclide, soit on remarque que
$$13\times 7+10\times(-9)=1$$
3. On note (L_1) :
$$13\times 7+10\times(-9)=1$$
Et (L_2)
$$13x+10y=1$$
Alors $(L_2)-(L_1)$ donne
$$13(x-7)+10(y+9)=0$$
Ce qui équivaut à
$$13(x-7)=-10(y+9)\quad (L_3)$$
13 divise $-10(y+9)$ et 13 est premier avec 10, d'après le lemme de Gauss, 13 divise $-(y+9)$, il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(y+9)=13k$, ce qui s'écrit aussi
$$y=-9-13k$$

La réciproque est évidente. On remplace $-(y+9)=13k$ dans (L_3), cela donne

$$13(x-7)=10\times 13k$$

On simplifie par 13, et on trouve que $x=7+10k$, l'ensemble des solutions est

$$(7+10k,-9-13k),k\in\mathbb{Z}$$

4. Première méthode

$$20u\equiv 2\ \ [13]\Leftrightarrow 10u\equiv 1\ [13]$$

Car 2 et 13 sont premiers entre eux.
On multiplie par -9. Et d'après la question 1. : $-9\times 10=1-7\times 13\equiv 1\ \ [13]$
Donc

$$20u\equiv 2\ \ [13]\Leftrightarrow -9\times 10u\equiv -9\ [13]\Leftrightarrow u\equiv -9\ [13]$$

Seconde méthode
Il existe $l\in\mathbb{Z}$ tel que $20u=2+13l$, ce qui équivaut à

$$20u-13l=2$$

D'après la question 3.

$$13x+10y=1\Leftrightarrow 13\times(2x)+20y=2\Leftrightarrow 20y-13\times(-2x)=2$$

A pour solution

$$(7+10k,-9-13k),k\in\mathbb{Z}$$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $u=-9-13k$, autrement dit $u\equiv -9\ [13]$.

Exercice 3.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x<0\\ x^3-x^2 & \text{si } 0\le x<1\\ 0 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

1. Déterminer les réels tels que f est continue.
2. Déterminer les réels tels que f est dérivable.

Correction exercice 3

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ f est continue et dérivable.

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0)$$

Donc f est continue en 0.

$$\lim_{x\to 1^-}(x^3-x^2)=0=f(1)$$

Donc f est continue en 1.
f est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x<0$, $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, on cherche sa limite en 0^- si elle existe, on vérifie sans peine qu'il s'agit d'une forme indéterminée. On pose $X=\frac{1}{x^2}$, donc $x=-\frac{1}{\sqrt{X}}$

$$f'(x)=2\left(-\sqrt{X}\right)^3e^{-X}=-2X^{\frac{3}{2}}e^{-X}$$

Il s'agit toujours d'une forme indéterminée, mais par croissance comparée la limite est nulle.
Pour $0<x<1$, $f'(x)=3x^2-2x$, sa limite en 0^+ est nulle
On en conclut que f est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut 0.
En 1^- la limite de $f'(x)$ est $3-2=1$, et on 1^+, la dérivée vaut 0 donc tend vers 0, qui est différent de 1. f n'est pas dérivable en 1.

Exercice 4.

On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et $P=(X+1)^7-X^7-1$

1. Calculer j^3 puis montrer que $1+j+j^2=0$
2. Montrer que P admet deux racines réelles évidentes.

3. Montrer que j est une racine multiple de P
4. Déterminer le degré de P ainsi que son coefficient dominant.
5. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction exercice 4

1. $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$ et comme $j \neq 1$, $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$.
2. $P(0) = 1^7 - 0^7 - 1 = 0$ et $P(-1) = 0^7 - (-1)^7 - 1 = 1 - 1 = 0$
   0 et -1 sont deux racines réelles évidentes.
3. On remarque que $j^4 = j, j^5 = j^2, j^6 = 1$ etc.
$$P(j) = (1+j)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j \times j^6 - 1 = -j^{14} - j - 1 = -j^2 \times (j^3)^4 - j - 1$$
$$= -j^2 - j - 1 = 0$$
$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$
$$P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6 = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(1-1) = 0$$
   Cela montre que j est une racine au moins double de P.
4. $P = X^7 + 7X^6 + \cdots 1 - X^7 - 1 = 7X^6 + \cdots$ donc le degré de P est 6 et son coefficient dominant est 7.
5. Comme $j^2 = \bar{j}$ et que le polynôme est à coefficients réels, j^2 est aussi une racine au moins double de P.
   En comptant la multiplicité des racines on a 6 racines $0, -1, j, j, j^2, j^2$, comme le polynôme est de degré 6 donc il n'y en a pas plus.
$$P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2$$
   C'est la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.
   Et dans $\mathbb{R}[X]$
$$P = 7X(X+1)\big((X-j)(X-j^2)\big)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$
   Car $(X-j)(X-j^2) = X^2 - jX - j^2X + j^3 = X^2 + (-j-j^2)X + 1 = X^2 + X + 1$.

Exercice 5.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites réelles respectivement définies par
$$u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
La numérotation commence à 1 ; les termes u_0 et v_0 ne sont pas définis.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que $v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
3.
   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité
$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$
   b. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

Correction exercice 5

1. Pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1}-u_n=2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-\left(2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}-1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{(2n+1)^2-4n(n+1)}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)}=\frac{4n^2+4n+1-4n^2-4n}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)}>0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Pour $n\geq 1$

$$v_n-u_n=2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\left(2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=2\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$$

3.

a.

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

b.

$$v_{n+1}-v_n=2\sqrt{n+2}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-\left(2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$=2\sqrt{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$=2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq\frac{2}{2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. D'après le théorème des suites adjacentes, c'est-à-dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et la différence tend vers 0, les deux suites sont convergentes.

Exercice 6.

On note f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(P)=\left(P(1),P(2)\right).$$

1.
   a. Soit a et b deux réels. Calculer $f\left(a(X-1)+b(X-2)\right)$.
   b. Montrer que l'application est surjective.
2. On note (E_0) l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E_0)\ \ f(P)=(0,0)$$

   a. Montrer que, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, si $(X-1)(X-2)$ divise P alors P est solution de (E_0).
   b. Montrer, réciproquement, que pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, si P est une solution de (E_0), alors $(X-1)(X-2)$ divise P.
   On pourra utiliser la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$.
   c. Quelles sont les solutions de (E_0) ?
3. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E)\quad f(P)=(-1,4)$$

4. Pour chaque entier d, entier naturel, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à d et on note f_d la restriction de f, de l'ensemble $\mathbb{R}_d[X]$ vers $\mathbb{R}^2$.

a. Pour quelles valeurs de d l'application est-elle surjective ?
b. Pour quelles valeurs de d l'application est-elle injective ?

Correction exercice 6

1.
   a. $f\big(a(X-1)+b(X-2)\big)=(-b,a)$
   b. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il existe $a=y$ $b=-x$ tels que
   $$f\big(y(X-1)-x(X-2)\big)=(x,y)$$
   f est surjective.
2.
   a.
   On suppose qu'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que
   $$P=(X-1)(X-2)Q$$
   Alors
   $$P(1)=0 \quad \text{et} \quad P(2)=0$$
   Donc P vérifie (E_0).
   b. D'après la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$ qu'il existe un unique couple de polynôme Q et R, avec $d°R<2$ tels que
   $$P=(X-1)(X-2)Q+R$$
   Première méthode
   On teste cette égalité pour $X=1$ et $X=2$, on a $P(1)=0$ et $P(2)=0$ et la partie en $(X-1)(X-2)Q$ s'annule donc
   $$\begin{cases} R(1)=0\\ R(2)=0\end{cases}$$
   Comme le degré de R est inférieur ou égal à 1, ce polynôme est nul.
   Seconde méthode
   Comme le degré de R est inférieur ou égal à 1, il existe α et β réels tels que
   $$R=\alpha X+\beta$$
   On teste P sur 1 et sur 2, la partie en $(X-1)(X-2)Q$ s'annule donc
   $$\begin{cases} \alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases}$$
   On voit sans peine que $\alpha=\beta=0$. R est donc le polynôme nul, ce qui montre que $P=(X-1)(X-2)Q$, c'est-à-dire que $(X-1)(X-2)$ divise P.
   c. D'après les deux points précédents P vérifie (E_0) si et seulement si $(X-1)(X-2)$ divise P, l'ensemble des solutions de (E_0) sont les multiples de $(X-1)(X-2)$.
3. D'après la première question $P_1=4(X-1)+(X-2)$ est une solution particulière de (E)
   Montrons que P est une solution de (E) équivaut à $P-P_1$ est une solution de (E_0)
   P est une solution de (E) si et seulement si $f(P)=(-1,4)=f(P_1)$ si et seulement si $\big(P(1),P(2)\big)=\big(P_1(1),P_1(2)\big)$ si et seulement si $\big((P-P_1)(1),(P-P_1)(2)\big)=(0,0)$
   D'après la question 2. $P-P_1$ est un multiple de $(X-1)(X-2)$, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des polynômes de la forme
   $$(X-1)(X-2)Q+4(X-1)+(X-2)$$
   Où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
   Autre méthode : utiliser les congruences de polynômes modulo $(X-1)(X-2)$
4.
   a. Si $d\geq 1$, d'après la question 1. n'importe couple de $\mathbb{R}^2$ admet un antécédent, donc f_d est surjective.
   Pour $d=0$ ou $d=-\infty$ (c'est-à-dire les polynômes constants égal à $\alpha\in\mathbb{R}$) $f(P)=(\alpha,\alpha)$, ces couples ne couvrent pas $\mathbb{R}^2$. Donc f_d n'est pas surjective.
   b. Si $d\geq 2$, soit $P_1=(X-1)(X-2)Q_1$ et $P_2=(X-1)(X-2)Q_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathbb{R}_{d-2}[X]$ distincts.

On a $f_d(P_1) = f_d(P_2)$ (égal à $(0,0)$) et $P_1 \neq P_2$ donc f n'est pas injective
Si $d \leq 1$
Première méthode
Soit P_1 et P_2 deux polynômes tels que $f_d(P_1) = f_d(P_2)$
il existe α_1 et β_1 réels tels que

$$P_1 = \alpha_1 X + \beta_1$$

et α_2, β_2 réels tels que

$$P_2 = \alpha_2 X + \beta_2$$

Comme $f(P_i) = (\alpha_i + \beta_i, 2\alpha_i + \beta_i)$ pour $i \in \{1,2\}$
On a alors

$$f_d(P_1) = f(P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_2 + \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Donc $P_1 = P_2$ et alors f est injective.
Seconde méthode
Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$f_d(P_1) = f_d(P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(1) = P_2(1) \\ P_1(2) = P_2(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P_1 - P_2)(1) = 0 \\ (P_1 - P_2)(2) = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $P_1 - P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ et il admet deux racines distinctes, il est donc nul, par conséquent $P_1 = P_2$ et f_d est injective.
Bilan : si $d°P \leq 1$ f_d est injective et si $d°P \geq 2$ f_d n'est pas injective.