Fondamentaux des mathématiques - DS n°4

Partie CUPGE

Corrigé

Exercice 1 :

1. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruences $x \equiv 7 \mod 27$ et $x \equiv 4 \mod 48$.
2. Démontrer que si $k \geq 2$ et $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ sont deux-à-deux premiers entre eux, alors pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ il y a $x \in \mathbb{N}$ avec $x \equiv a_i \mod n_i$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Solution.

1. On calcule le $\text{pgcd}(27, 48)$ avec l'algorithme d'Euklide :

$$\begin{aligned} 48 &= 27 + 21 \\ 27 &= 21 + 6 \\ 21 &= 3 \cdot 6 + 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{pgcd}(27, 48) = 3$ (ce qu'on aurait pu voir avec les factorisations $27 = 3 \cdot 9$ et $48 = 3 \cdot 16$, avec $9 = 3^2$ et $16 = 2^4$ premiers entre eux). Alors

$$3 = 21 - 3 \cdot 6 = 21 - 3 \cdot (27 - 21) = 4 \cdot 21 - 3 \cdot 27 = 4 \cdot (48 - 27) - 3 \cdot 27 = 4 \cdot 48 - 7 \cdot 27.$$

Or, $3 \mid 7 - 4 = 3$, ce qui signifie qu'il y a des solutions. En divisant par 3, on obtient $1 = 4 \cdot 16 - 7 \cdot 9$. Une solution particulière est alors donnée par

$$x_0 = 7 \cdot 4 \cdot 16 - 4 \cdot 7 \cdot 9 = 28 \cdot 7 = 196.$$

On a $\text{ppcm}(27, 48) = 3 \cdot 9 \cdot 16 = 432$. L'ensemble des solutions est ainsi $x \in 196 + 432\mathbb{Z}$.

2. Par récurrence sur k. Pour $k = 2$ c'est un théorème du cours : D'après Bézout il y a des entiers relatifs s, t avec $\text{pgcd}(n_1, n_2) = 1 = sn_1 + tn_2$. Alors $x = a_2 s n_1 + a_1 t n_2$ satisfait

$$\begin{aligned} x &= a_2(sn_1 + tn_2) + (a_1 - a_2)tn_2 \equiv a_2 \cdot 1 = a_2 \mod n_2 \\ x &= (a_2 - a_1)sn_1 + a_1(sn_1 + tn_2) \equiv a_1 \cdot 1 = a_1 \mod n_1. \end{aligned}$$

Si jamais $x < 0$ on remplace x par $y = x + n_1 n_2 |x| > 0$; on a alors $y \equiv x$ modulo n_1 et modulo n_2.
On suppose donc l'énoncé vrai pour k, et on considère un système de longueur $k+1$. D'après l'hypothèse de récurrence il y a $b \in \mathbb{N}$ avec $b \equiv a_i \mod n_i$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$. On pose $n = n_1 \cdots n_k$. Alors n et n_{k+1} sont premiers entre eux, puisque tout facteur premier de n_{k+1} divise aucun des n_i pour $0 \leq i \leq k$. D'après les cas $k = 2$ il y a $x \in \mathbb{N}$ tel que $x \equiv b \mod n$ et $x \equiv a_{k+1} \mod n_{k+1}$. Mais alors $x \equiv b \equiv a_i \mod n_i$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.
D'après le principe de récurrence, l'énoncé est donc vrai pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 2 : Montrer que l'équation $2^n + 1 = m^3$ d'inconnues $m, n \in \mathbb{N}$ n'a pas de solution.

Solution. On a $m^3 \geq 2^0 + 1 = 2$, d'où $m > 1$. L'équation donne $2^n = m^3 - 1 = (m - 1)(m^2 + m + 1)$. Ainsi $m^2 + m + 1$ est une puissance de 2. Mais $m^2 + m = m(m + 1)$ est pair, et $m^2 + m + 1 > 1$ est impair, une contradiction.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ existent dans $\bar{\mathbb{R}}$ et sont égales. Montrer que f n'est pas injective.

Solution. Soit $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Si f est constante, f n'est pas injective. Sinon, il y a $c \in]a, b[$ avec $f(c) \neq \ell$. Puisque l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, $f(]a, c])$ et $f([c, b[)$tous les deux contiennent l'intervalle non-vide $]\ell, f(c)]$ (si $\ell < f(c)$) ou $[f(c), \ell[$ (si $f(c) < \ell$). Soit

$d \neq f(c)$ dans cet intervalle. Alors il y a $x \in]a, c[$ et $y \in]c, b[$ avec $f(x) = d$ et $f(y) = d$. Ainsi $x < c < y$ et $f(x) = d = f(y)$. Donc f n'est pas injective.

Exercice 4 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et de dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. Soit $0 < x < y$. D'après le TAF il y a $0 < a < x$ et $x < b < y$ avec

$$\frac{f(x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(a) \leq f'(b) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Ainsi

$$(y - x)\, f(x) = yf(x) - xf(x) \leq x\,(f(y) - f(x)) = xf(y) - xf(x),$$

ce qui donne $yf(x) \leq xf(y)$, autrement dit $f(x)/x \leq f(y)/y$. Donc $f(x)/x$ est croissante.

Alternative. Puisque f' est croissante, f est convexe. Soit $0 < x < y$. D'après le lemme des trois pentes appliqué à 0, x et y on a

$$\frac{f(x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{f(y}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

(La dernière inégalité n'est même pas utilisée.)

Exercice 5 : On rappelle la formule de Taylor-Lagrange :
Si $f \in \mathcal{C}^n([a, x], \mathbb{R})$ est $n+1$ fois dérivable sur $]a, x[$, alors il y a $c \in]a, x[$ avec

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Quand $x < a$ on a la même formule, mais avec les intervalles $[x, a]$ et $]x, a[$ à la place de $[a, x]$ et $]a, x[$.
Pour cette question, on traitera les deux cas a) $f(x) = e^x$ et b) $f(x) = \cos(x)$.

1. Donner une borne (qui peut dépendre de x) pour $\sup\{|f^{(n)}(c)| : -|x| \leq c \leq |x|\}$ indépendant de n.
2. On pose $u_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3. En déduire que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Solution.

1. Dans le cas a) on a $f^{(n)}(x) = e^x$, ce qui est croissant. Ainsi $\sup\{|f^{(n)}(c)| : -|x| \leq c \leq |x|\} = e^{|x|}$. Dans le cas b) on a $f^{(n)}(x) \in \{\pm \sin(x), \pm \cos(x)\}$. Ainsi $\sup\{|f^{(n)}(c)| : -|x| \leq c \leq |x|\} \leq 1$.
2. D'après la formule de Taylor-Lagrange avec $a = 0$, on a

$$u_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

pour un c entre 0 et x. Ainsi dans le cas a) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|u_n| \leq e^{|x|} |x|^{n+1}/(n+1)! \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

et dans le cas b) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|u_n| \leq 1 \cdot |x|^{n+1}/(n+1)! \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

3. Dans le cas a) on a $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = \lim_{n\to\infty} (e^x - u_n) = e^x - \lim_{n\to\infty} u_n = e^x.$$

Dans le cas b) on a $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x)$ et $f^{(2n+1)}(x) = -(-1)^n \sin(x)$. Ainsi $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \lim_{n\to\infty} (\cos(x) - u_n) = \cos(x) - \lim_{n\to\infty} u_n = \cos(x).$$