Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
PARTIE CUPGE

Exercice 1 :

1. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruences $x \equiv 7 \mod 27$ et $x \equiv 4 \mod 48$.
2. Démontrer que si $k \geq 2$ et $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ sont deux-à-deux premiers entre eux, alors pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ il y a $x \in \mathbb{N}$ avec $x \equiv a_i \mod n_i$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Exercice 2 : Montrer que l'équation $2^n + 1 = m^3$ d'inconnues $m, n \in \mathbb{N}$ n'a pas de solution.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$ existent dans $\bar{\mathbb{R}}$ et sont égales. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 4 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et de dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 : On rappelle la formule de Taylor-Lagrange :
Si $f \in \mathcal{C}^n([a,x],\mathbb{R})$ est $n+1$ fois dérivable sur $]a,x[$, alors il y a $c \in]a,x[$ avec

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Quand $x < a$ on a la même formule, mais avec les intervalles $[x,a]$ et $]x,a[$ à la place de $[a,x]$ et $]a,x[$.
Pour cette question, on traitera les deux cas a) $f(x) = e^x$ et b) $f(x) = \cos(x)$.

1. Donner une borne (qui peut dépendre de x) pour $\sup\{|f^{(n)}(c)| : -|x| \leq c \leq |x|\}$ indépendant de n.
2. On pose $u_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3. En déduire que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$