Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 14 octobre 2020

Devoir surveillé N°2
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1
Déterminer (s'ils existent) : la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

a) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cap \mathbb{Q}\right)$.

b) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{m}{n+m}, (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.

c) $\left\{\arctan\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.

d) $\left\{e^{-m} + 1, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Solution :
a) On note : $A = \sin\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cap \mathbb{Q}\right)$. On remarque que : $A \subset \sin\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et donc

$$0 \leq inf(A) \leq sup(A) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $0 \in A$, on a $inf(A) = min(A) = 0$.

Ensuite, on sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q} \cap [0, \pi/4]$ est dense dans $[0, \pi/4]$, par conséquent il existe une suite $q_n \in \mathbb{Q} \cap [0, \pi/4]$ qui converge vers $\pi/4$, ainsi $\sin(q_n) \in [0, \sqrt{2}/2]$ converge vers $\sqrt{2}/2$.
$\Rightarrow sup(A) = \sqrt{2}/2$, ainsi, il ne s'agit pas d'un maximum vu qu'il n'appartient pas à A.

b) On note $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{m}{n+m}, (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.
D'abord, on a $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} + \frac{m}{n+m} \leq 2$.
On en déduit que

$$0 \leq inf(B) \leq sup(B) \leq 2.$$

Pour m fixé, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} + \frac{m}{n+m} = 0$, alors $0 = inf(B)$. 0 n'est pas un minimum car il n'appartient pas à l'ensemble.

Pour $n = 1$, on a $\lim_{m \to +\infty} 1 + \frac{m}{1+m} = 2$, alors $sup(B) = 2$. 2 n'est pas un maximum car il n'appartient pas à l'ensemble.

c) On note $C = \left\{\arctan\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\arctan\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) \geq 0 = \arctan(0), \quad \Rightarrow \quad min(C) = inf(C) = 0$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\arctan\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) \leq \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$.

$\Rightarrow sup(C) = \frac{\pi}{4}$, ainsi, il ne s'agit pas d'un maximum vu qu'il n'appartient pas à C.

d) On note $D = \Big\{e^{-m}+1, m \in \mathbb{N}\Big\}$.
On a $\forall m \in \mathbb{N}, e^{-m}+1 \leq 2 = e^{-0}+1$, ainsi, $sup(D) = max(D) = 2$.
De plus, $\forall m \in \mathbb{N}, e^{-m}+1 \geq 1 = \lim\limits_{m\to+\infty}(e^{-m}+1)$,
$\Rightarrow inf(D) = 1$, ainsi, il ne s'agit pas d'un minimum vu qu'il n'appartient pas à D.

Exercice 2
Soit $I_n = \{1, 2..., n\}$, $\mathcal{P}(I_n)$ l'ensemble des parties de I_n.

1. Donner $\mathcal{P}(I_n)$ pour $n = 3$.

2. On définie une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(I_n)$ comme suit :

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(I_n)$.
b) Soit $A \in \mathcal{P}(I_n)$, Card$(A) = k \leq n$. Calculer le cardinal de $\Big\{B \in \mathcal{P}(I_n), A\mathcal{R}B\Big\}$.

3. Calculer le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\Big\{A \in \mathcal{P}(I_n) \mid i \in A \Leftrightarrow \ n - i \in A\Big\}.$$

Solution :
1. $\mathcal{P}(I_3) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
2.
a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(I_n)$:

Réflexivité : $\forall A \in \mathcal{P}(I_n)$, on a $A \subset A$ donc $A\mathcal{R}A$.

Anti-symétrie : Soient $A, B \in \mathcal{P}_n$. Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ alors on a : $A \subset B \subset A$, ce qui implique que : $A = B$.

Transitivité : Soient A, B et $C \in \mathcal{P}_n$, Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$ alors $A \subset B \subset C$, donc $A \subset C$ qui équivaut $A\mathcal{R}C$.
Conclusion : la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_n$.

b)

$$\begin{aligned}
\text{Card}\Big\{B \in \mathcal{P}(I_n), A\mathcal{R}B\Big\} &= \text{Card}\Big\{B \in \mathcal{P}(I_n), A \subset B\Big\} \\
&= \text{Card}\Big\{B \in \mathcal{P}(I_n), B = A \cup I \text{ et } I \cap A = \emptyset\Big\} \\
&= \text{Card}\Big\{I \in \mathcal{P}(I_n), I \cap A = \emptyset\Big\} \\
&= \text{Card}\Big\{I \in \mathcal{P}(I_n), I \in A^c\Big\} \\
&= \text{Card}\left(\mathcal{P}(A^c)\right) = 2^{n-k}.
\end{aligned}$$

3) On pose :

$$X = \Big\{ A \in \mathcal{P}(I_n) \mid i \in A \Leftrightarrow \; n - i \in A \Big\}.$$

Cas 1 : pour n pair, soit :

$$Z = \{1, 2, ..., \frac{n}{2}\}$$

On définit :

$$\begin{aligned} f : & X \longmapsto \mathcal{P}(Z) \\ & A \longrightarrow \bigcup_{i \in A, i \leq \frac{n}{2}} \{i\}. \end{aligned}$$

Montrons que f est bijective.
D'abord, pour $I \in \mathcal{P}(Z)$ on a $\left(I \bigcup_{i \in I} \{n-i\} \right) \in X$ par définition et $f\left(I \bigcup_{i \in I} \{n-i\} \right) = I$, ce qui prouve que f est surjective.
Ensuite, supposons que $f(A) = f(B)$ pour $A, B \in X$, cela implique que $\bigcup_{i \in A, i \leq \frac{n}{2}} \{i\} = \bigcup_{i \in B, i \leq \frac{n}{2}} \{i\}$, puis que $\bigcup_{i \in A} \{i, n-i\} = \bigcup_{i \in B} \{i, n-i\}$, comme $A, B \in X$, on a $A = \bigcup_{i \in A} \{i, n-i\}$ et $B = \bigcup_{i \in B} \{i, n-i\}$, d'où le l'injectivité puis la bijectivité de f.
Maintenant qu'on a trouvé une bijection entre X et $\mathcal{P}(Z)$, on peut conclure que :

$$\text{Card}(X) = \text{Card}(f(X)) = \text{Card}(\mathcal{P}(Z)) = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Cas 2 pour n impair on pose

$$Z = \{1, 2, ..., \frac{n+1}{2}\}$$

le même travail montre que $\text{Card}(X) = 2^{\frac{n+1}{2}}$.

Exerice 3
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont le terme général est donné par :

a) $u_n = \dfrac{n}{\ln(cos^2(n) + 3)}$.

b) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2 + k + 1}$.

d) $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Solution :
a) On a $\forall n \in \mathbb{N}, cos^2(n) + 3 \leq 4 \implies ln(cos^2(n) + 3) \leq ln(4)$. Par conséquent, $u_n \geq \frac{n}{ln(4)} \to +\infty$.

b) On a :

$$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n^2 + n} - n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2} &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

c) On remarque que $\forall k, 1 \leq k \leq n$, on a $0 \leq \frac{\sqrt{k}}{n^2+k+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2}$, cela implique que :

$$0 \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2+k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Enfin, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

d) On a :

$$\begin{aligned} u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\right) &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1) \prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k \prod_{k=2}^{n} k} \\ \text{(changement d'indice)} &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k \prod_{k=2}^{n} k} \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

1) Montrer que : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$. En déduire que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^{-x}x+1)}{x} = 1$.

2) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x + e^x$.

a) Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.

b) Montrer qu'il existe un seul $\alpha \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $h(x) = 0$, puis que $\alpha \in]-1, 0[$.

3) Soit $f :]\alpha, \infty[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x + e^x)}{x}$.

a) Calculer la limite de f en α et $+\infty$.

b) En utilisant la question 1. calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.

4) Dans le reste de l'exercice, on admet que la fonction f est bien définie sur $]\alpha, \infty[$ tout entier, qu'elle est dérivable et que $f'(x) < 0$, $\forall x \in]\alpha, \infty[$.

a) Dessiner le graphe de f.

b) Montrer que f réalise une bijection entre $]\alpha, \infty[$ et un intervalle I de $\mathbb{R}$ à déterminer.

Solution :

1. On sait que pour une fonction dérivable f, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

En appliquant à $f(x) = ln(x+1)$, on trouve le résultat.
Ensuite, on sait que $\lim_{x \to 0} e^{-x}x = 0$ et par composition des limites on trouve que :
$\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^{-x}x+1)}{e^{-x}x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$. Enfin, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^{-x}x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^{-x}x+1)}{e^{-x}x} e^{-x} = 1$.

2.
a) La fonction h est dérivable, car elle s'agit d'une somme de deux fonctions dérivables,
on a : $h'(x) = 1 + e^x$.
b) $\forall x, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme $\lim_{x \to -\infty} = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ alors h

réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par conséquent l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution (notée α).
Finalement, $\alpha \in]-1, 0[$ car :

$$h(-1) = e^{-1} - 1 < h(\alpha) = 0 < h(0) = 1.$$

3.a) On a $\lim_{x\to\alpha} h(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} ln(x) = -\infty$, par composition des limites et comme $\alpha \leq 0$, on a :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \left(\lim_{x\to\alpha} ln(h(x))\right)\frac{1}{\alpha} = +\infty.$$

De plus, pour $x \geq 0$:

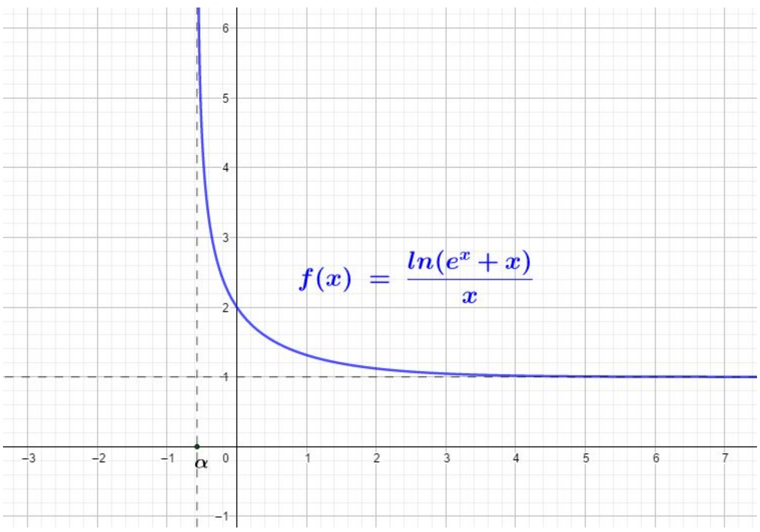
$$1 = \frac{ln(e^x)}{x} \leq \frac{ln(x+e^x)}{x} \leq \frac{ln(2e^x)}{x} = \frac{ln(2)}{x} + 1$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) D'après la question 1.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(e^x(e^{-x}x+1))}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{ln(e^{-x}x+1)}{x} = 2.$$

4. a) (Indiquer $h(0)$ et les limites en α et en $+\infty$).



b) D'abord, f est strictement décroissante, $\lim_{\alpha} = +\infty$ et $\lim_{+\infty} = 1$ donc $f(]\alpha, +\infty[) \subset]1, +\infty[$.
Ensuite, comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $f(]\alpha, +\infty[) =]1, +\infty[$ et enfin, f est injective car elle est strictement monotone, en conclusion : f réalise une bijection entre $]\alpha, +\infty[$ et $]1, +\infty[$.