Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
PARTIE CUPGE
CORRIGÉ

Exercice 1 : Montrer que pour toutes propositions P et Q, les énoncés suivants sont équivalents :

$$P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \text{et} \quad P \Rightarrow Q.$$

Solution : On considère le tableau de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow (P \to Q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Les deux dernières colonnes sont les mêmes. Les deux énoncés sont donc équivalents.
Alternative :

$$P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \equiv \neg P \vee (\neg P \vee Q) \equiv (\neg P \vee \neg P) \vee Q \equiv \neg P \vee Q \equiv P \Rightarrow Q.$$

Exercice 2 : L'énoncé suivant est-il vrai ? Si oui, le justifier (sans démonstration) ; si non, donner un contre-exemple.

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ \{[X \neq \emptyset \text{ et } \exists a \in \mathbb{R} \ (\forall x \in X,\ x \leq a)] \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \ [(\forall x \in X,\ x \leq b) \text{ et } (\forall \epsilon > 0 \ \exists x \in X,\ b - \epsilon < x)]\}.$$

Donner sa négation.
[Indication : L'énoncé est bien connu et a figuré dans le cours.]
Solution : C'est l'axiome de la borne supérieure (avec la caractérisation de la borne supérieure). C'est donc vrai.

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ \{[X \neq \emptyset \text{ et } \exists a \in \mathbb{R} \ (\forall x \in X,\ x \leq a)] \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \ [(\forall x \in X,\ x \leq b) \text{ et } (\forall \epsilon > 0 \ \exists x \in X,\ b - \epsilon < x)]\}.$$

Toute partie X de $\mathbb{R}$ non-vide qui admet un majorant a, admet un majorant b qui est une borne supérieure.

Négation :

$$\exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ \{[X \neq \emptyset \text{ et } \exists a \in \mathbb{R} \ (\forall x \in X,\ x \leq a)] \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} \ [(\exists x \in X,\ x > b) \text{ or } (\exists \epsilon > 0 \ \forall x \in X,\ b - \epsilon \geq x)]\}.$$

Exercice 3 : Montrer que pour $x \neq 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} \sinh(kx) = \frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x) - \cosh(\frac{x}{2})}{2\ \sinh(\frac{x}{2})}.$$

[Indication : Il suffit de connaître les définitions de sinh et cosh — et de sommer.]
Solution : Il est évident que pour $x = 0$ la somme est zéro, et le terme à droite est indéfini. Pour $x \neq 0$ on a $e^x \neq 1$, et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sinh(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \Big((e^x)^k - (e^{-x})^k \Big) = \frac{1}{2} \Big(\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k - \sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\frac{(e^x)^{n+1} - 1}{e^x - 1} - \frac{(e^{-x})^{n+1} - 1}{e^{-x} - 1} \Big) = \frac{1}{2} \Big(\frac{e^{x(n+1/2)} - e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} - \frac{(e^{-x(n+1/2)} - e^{x/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{x(n+1/2)} - e^{-x/2} + e^{-x(n+1/2)} - e^{x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{1}{2} \frac{2\cosh(x(n+1/2) + 2\cosh(x/2)}{2\sinh(x/2)} \\
&= \frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x) - \cosh(\frac{x}{2})}{2\ \sinh(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}$$

Alternative : Par récurrence.

Initialisation : $n=0$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\sinh(kx)=0=\frac{0}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}=\frac{\cosh((0+\frac{1}{2})x)-\cosh(\frac{x}{2})}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}$.

Hypothèse : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sinh(kx)=\frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x)-\cosh(\frac{x}{2})}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}$.

Hérédité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\sinh(kx) &= \sum_{k=0}^{n}\sinh(kx)+\sinh((n+1)x)=\frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x)-\cosh(\frac{x}{2})}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}+\sinh((n+1)x)\\
&=\frac{(\cosh((n+\frac{1}{2})x)-\cosh(\frac{x}{2}))+2\,\sinh((n+1)x)\sinh(x/2)}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}\\
&=\frac{(e^{(n+1/2)x}+e^{-(n+1/2)x}-e^{x/2}-e^{-x/2})+(e^{(n+1)x}-e^{-(n+1)x})\,(e^{x/2}-e^{-x/2})}{4\sinh(x/2)}\\
&=\frac{(e^{(n+1/2)x}+e^{-(n+1/2)x}-e^{x/2}-e^{-x/2})+(e^{(n+3/2)x}-e^{(n+1/2)x}-e^{-(n+1/2)x}+e^{-(n+3/2)x}}{4\sinh(x/2)}\\
&=\frac{(e^{(n+3/2)x}+e^{-(n+3/2)x}-e^{x/2}-e^{-x/2}}{4\sinh(x/2)}=\frac{\cosh((n+1+\frac{1}{2})x)-\cosh(\frac{x}{2})}{2\,\sinh(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, l'énoncé est vrai.

Exercice 4 : On rappelle qu'une suite arithmétique est une suite telle que $u_{n+1}-u_n$ est constant. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique qui ne s'annule pas, alors

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k\,u_{k+1}}=\frac{n+1}{u_0\,u_{n+1}}.$$

[Indication : Soit $d=u_{n+1}-u_n$ la différence constante. Calculer $\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{u_k\,u_{k+1}}$.]

Solution : On rappelle que $u_n=u_0+nd$. On a une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k\,u_{k+1}} &= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{u_k\,u_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_k\,u_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}}\Big)=\frac{1}{d}\Big(\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}}\Big)\\
&=\frac{1}{d}\,\frac{u_{n+1}-u_0}{u_0\,u_{n+1}}=\frac{1}{d}\,\frac{(n+1)d}{u_0\,u_{n+1}}=\frac{n+1}{u_0\,u_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Alternative : Par récurrence.

Initialisation : $n=0$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{u_k\,u_{k+1}}=\frac{1}{u_0\,u_1}$.

Hypothèse : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k\,u_{k+1}}=\frac{n+1}{u_0\,u_{n+1}}$.

Hérédité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{u_k\,u_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k\,u_{k+1}}+\frac{1}{u_{n+1}\,u_{n+2}}=\frac{n+1}{u_0\,u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+1}\,u_{n+2}}=\frac{(n+1)u_{n+2}+u_0}{u_0\,u_{n+1}\,u_{n+2}}\\
&=\frac{(n+1)\,(u_{n+1}+d)+(u_{n+1}-(n+1)\,d)}{u_0\,u_{n+1}\,u_{n+2}}=\frac{(n+2)\,u_{n+1}}{u_0\,u_{n+1}\,u_{n+2}}=\frac{n+2}{u_0\,u_{n+2}}.
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, l'énoncé est vrai.

Exercice 5 : Étudier la fonction réelle f définie par

$$f(x)=x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big).$$

(Donner son domaine maximal, étudier sa continuité et dérivabilité, ses limites à $\pm\infty$ et aux bornes de son domaine, ses asymptotes affines éventuelles, son tableau des variations, et dresser son graphe.)

Solution : Le domaine maximal est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ puisqu'il faut que le dénominateur soit différent de zéro. Sur ce domaine f est continue et dérivable, comme produit et composition de fonctions dérivables.

Calcul de la fonction dérivée.

$$f'(x) = \exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) + x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big)\,\frac{2\,(x^2-1) - 2x\,2x}{(x^2-1)^2} = \exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big)\,\Big(1 - x\,\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}\Big).$$

Le signe de f' est celui de $1 - x\,\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$, et donc celui de

$$g(x) = (x^2-1)^2 - x\,(2x^2+2) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

Ce polynôme est symétrique ; on essaie donc une substitution $y = x + \frac{1}{x}$. Pour $x = 0$ on a $g(0) = 1 > 0$. Pour $x \neq 0$ le signe de g est le même que celui de

$$\frac{g(x)}{x^2} = x^2 - 2x - 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 - 2(x + \frac{1}{x}) - 2 = y^2 - 2y - 4.$$

Ainsi $x + \frac{1}{x} = y = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5}$. Donc $x^2 - (1 \pm \sqrt{5})x + 1 = 0$. Le discriminant est

$$\Delta = (1 \pm \sqrt{5})^2 - 4 = 1 + 5 \pm 2\sqrt{5} - 4 = 2 \pm 2\sqrt{5}.$$

Il n'y a donc des solutions réelles que pour $y = 1 + \sqrt{5}$, et les solutions (des zéros simples) sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2} \\ x_2 &= \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}. \end{aligned}$$

Alors $g(x) > 0$ pour $x < x_1$ ou $x > x_2$, et $g(x) < 0$ pour $x_1 < x < x_2$. On note que $x_1 > 0$, puisque $(1+\sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5} > 2 + 2\sqrt{5}$.

Calcul des limites. On a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{2}{x - \frac{1}{x}} = 0\,; \\ &\lim_{n\to 1^+}(x^2-1) = 0^+, \quad \lim_{n\to 1^-}(x^2-1) = 0^-, \quad \lim_{n\to -1^+}(x^2-1) = 0^- \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to -1^-}(x^2-1) = 0^+\,; \\ &\lim_{n\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{n\to -1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{n\to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) &= \infty \cdot e^0 = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to-\infty} x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) = -\infty \cdot e^0 = -\infty\,; \\ \lim_{n\to 1^+} x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) &= e^{\infty} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to 1^-} x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{n\to -1^+} x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) &= -e^{\infty} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to -1^-} x\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) = -e^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

Asymptotes. On a des asymptotes verticales $x = 1$ (à droite) et $x = -1$ (à droite). En $\pm\infty$ on calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) = e^0 = 1.$$

Alors avec la substitution $y = \frac{1}{x}$ on obtient

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\,(\exp\Big(\frac{2x}{x^2-1}\Big) - 1) = \lim_{y\to 0} \frac{\exp\Big(\frac{2/y}{y^{-2}-1}\Big) - \exp(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\exp\Big(\frac{2y}{1-y^2}\Big) - \exp(0)}{y} = h'(0),$$

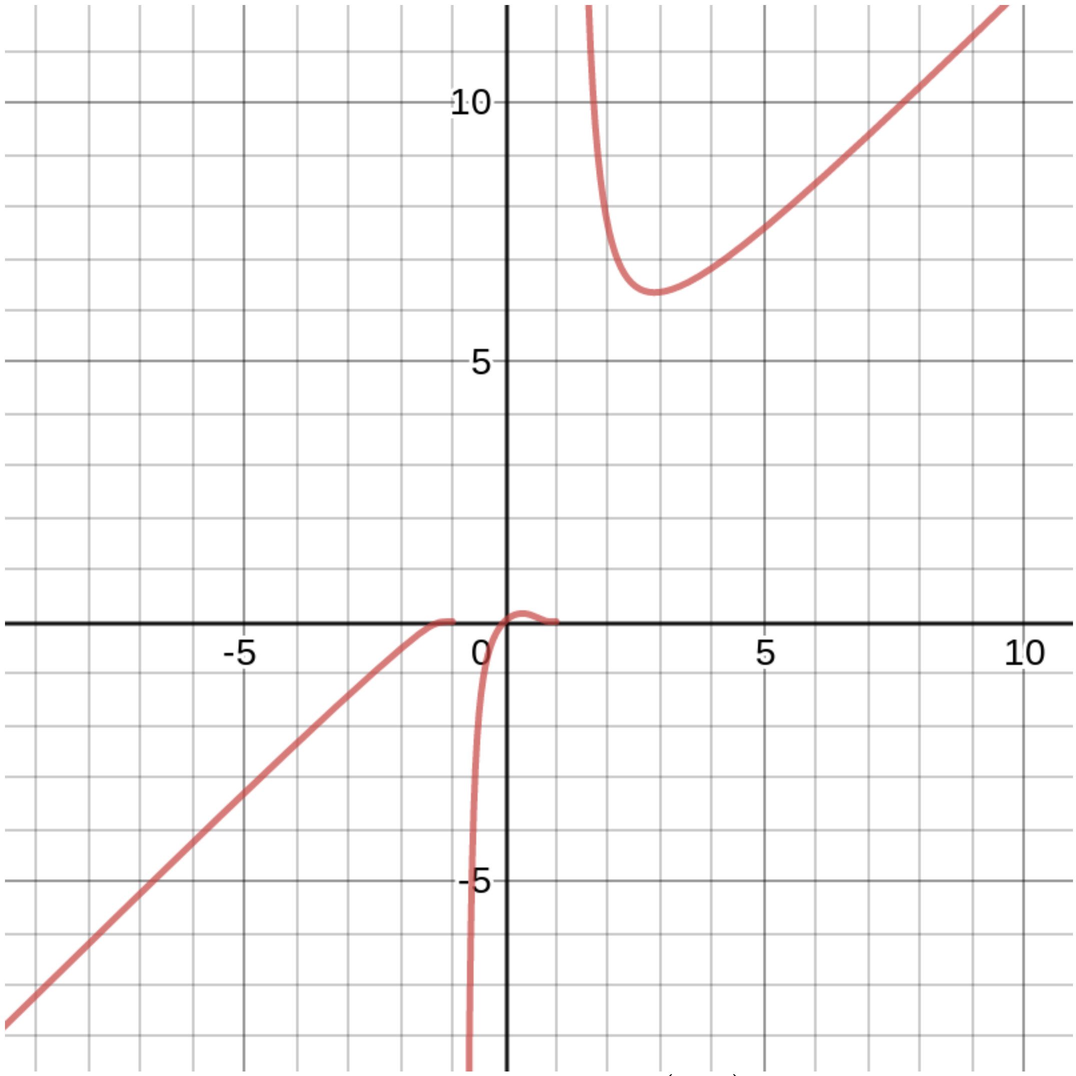
où $h(y) = \exp\Big(\frac{2y}{1-y^2}\Big)$. Or,

$$h'(y) = \exp\Big(\frac{2y}{1-y^2}\Big)\,\frac{2\,(1-y^2) + 2y\,2y}{(1-y^2)^2} = \exp\Big(\frac{2y}{1-y^2}\Big)\,\frac{2y^2+2}{(1-y^2)^2}.$$

Ainsi $h'(0) = 2$ et on a une asymptote $y = x + 2$ en $\pm\infty$.

Tableau des variations. On note que $0 < x_1 < 1 < x_2$ puisque $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5} < 2 + 2\sqrt{5}$. En particulier $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont positifs. On a $f(0) = 0$.

x	$-\infty$		-1		0		x_1		1		x_2		∞
$f'(x)$		$+$	$\vert$		$+$		0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0\vert-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$0\vert\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	∞



Le graphe de $f(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$.