Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Algbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Contrôle Continu n° 2

Mardi 12 Novembre 2019 – Durée 90 minutes

Let calculatrices et documents ne sont pas permises.

Questions de cours 1 (6 pts.)**.** Soit u un endomorphism de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La dimension de E soit finie.

1. On suppose que E admet une base $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ de vecteurs propres de u. Montrer que

$$E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}\{b_j \in \mathcal{B} \mid \lambda_j = \lambda_i\}$$

   où b_i est vecteur propre pour λ_i.

2. Montrer que E admet une base de vecteurs propres de u si et seulement si, le polynôme caractéristique de u est scindé et pour toute valeur propre λ de u, sa multiplicité algébrique $m_\lambda(u)$ coincide avec sa multiplicité géométrique $g_\lambda(u)$.

Remarque : pour répondre à cette question, il ne suffit pas de citer le théorème du cours.

Exercice 1 (3 pts.)**.** Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont-1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est semblable à une matrice diagonale ?

Exercice 2 (3 pts.)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$? Sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Donner une formule pour les puissances A^n de A.

Exercice 3 (4 pts.). Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{id}_E$

1. Montrer que les seules valeurs propres possible de f sont -1 et 1.
2. Montrer que pour tout $x \in E$ on a :

$$f(x - f(x)) = -(x - f(x)) \quad \text{et} \quad f(x + f(x)) = x + f(x)$$

3. Démontrer que si -1 et 1 sont valeurs propres de f alors E est la somme directe de $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et de $\ker(f + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 4 (4 pts.). Soit $R_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré plus petit ou égal à 2. On considère l'endomorphisme $u(P) = XP' - 1$ sur $R_2[X]$. Ici P' est la dérivée de P.

1. Est-ce que u est diagonalisable ?
2. Soit λ la valeur propre la plus grande de u. Trouver les solutions de l'equation $u(p) = \lambda p$.
3. (Bonus 2 pts.) Montrer que, pour tout polynôme Q de degré plus petit ou égal 1, $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^k} u^k(Q) = 0$.