Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2019–2020**

L2 - Informatique | UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille TD 7

Exercice 7.1. Une machine produit des vis de longueur de 500mm avec un écart-type de 10mm. On peut supposer que la longueur suit une loi normale.

1. Quelle est la probabilité qu'une vis soit plus courte que 485mm ?
2. Quelle est la probabilité qu'une vis soit entre 499mm et 501mm ?
3. Quelle est la probabilité qu'une vis ne puisse pas être vendue parce que la longueur diffère de plus de 50mm de la longueur moyenne ?

Exercice 7.2. Soit $p(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer les valeurs a et b telles que p soit la densité d'une variable aléatoire X avec $\mathbb{E}[X] = \frac{17}{24}$.
2. Calculer la variance et la fonction de répartition correspondante.

Exercice 7.3. Dans une grande station de montagne, il y a 10 000 skieurs par semaine. On sait qu'en moyenne 1% des skieurs ont un accident pendant la semaine, et on va supposer que ce risque est le même pour chaque skieur indépendamment.

0. Quelle est la loi du nombre de skieurs accidentés par semaine ?

En utilisant l'approximation par la loi normale, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins que 100 accidents au cours d'une certaine semaine ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins que 50 accidents au cours d'une certaine semaine ?
3. Pour être sûr à 95% d'accueillir toutes les victimes d'accidents, combien de places l'hôpital de la station doit-il préparer ?

Exercice 7.4. Mathias est censé recevoir deux emails importants dans les sept prochains jours. Le temps d'arrivée du premier email est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 7]$. Le temps d'arrivée du deuxième email est une variable aléatoire de densité

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{49} & \text{si } 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut supposer que les deux variables sont indépendantes. Quelle est la probabilité qu'à la fin du cinquième jour seulement un des deux emails soit arrivé ?

Exercice 7.5. On choisit au hasard une corde C dans un cercle de rayon 1. Quelle est la probabilité de l'événement $A =$ « la longueur de la corde est supérieure à $\sqrt{3}$ ».

1. On choisit indépendemment deux points X, Y de loi uniforme sur le cercle, puis on pose $C = [XY]$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.
2. On choisit au hasard un diamètre D du cercle, puis on choisit au hasard un point $P \in D$. On choisit pour C la corde perpendiculaire à D passant par P. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1/2$.
3. On choisit au hasard un point M dans le cercle, et on définit C comme l'unique corde dont M est le milieu. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1/4$.
4. Pourquoi obtient-on des réponses différentes ? Quelle réponse est la bonne ?

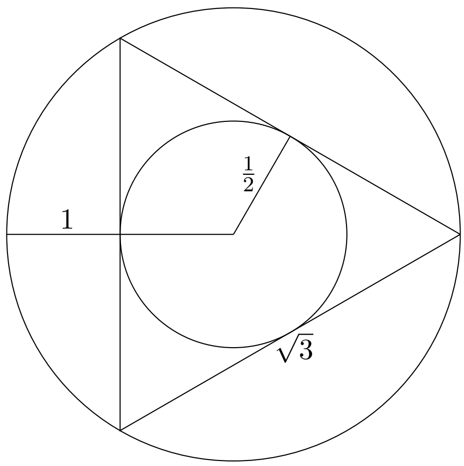

FIGURE 1 – Un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$, son cercle inscrit de rayon $\frac{1}{2}$ et son cercle circonscrit de rayon 1

Exercice 7.6. Au cours d'un jeu télévisé, un candidat tire au sort entre 2 enveloppes contenant respectivement les sommes x_1 et x_2 ($x_1 > x_2 > 0$), qu'il ne connaît pas. Après avoir examiné le contenu X de son enveloppe, il a le choix entre conserver ce contenu et effectuer un échange avec l'autre enveloppe. On veut étudier la stratégie suivante : on se donne T une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante du tirage au sort et on change d'enveloppe seulement lorsque $T > X$. Calculer la probabilité d'obtenir la somme la plus élevée x_1 en suivant cette stratégie.