Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2019–2020**

L2 - Informatique | UE : Statistiques pour l'Informatique

Examen final du 10 janvier 2020

Durée : 120 minutes

Les documents, les téléphones et les ordinateurs sont interdits. Les calculatrices sont autorisées.

Loi normale

$1-\alpha$	0.90	0.95	0.975
$z_{\frac{\alpha}{2}}$	1.64	1.96	2.24

Exercice 1 Soit $p \in (0,1)$ et $\lambda > 0$. Soient X et Y deux variables aléatoires qui prennent des valeurs dans $\mathbf{N}$. La loi du couple (X,Y) est donnée par

$$P(X=k,Y=n) = \begin{cases} (1-p)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} & \text{si } k=0 \\ p\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k \neq 0,2 \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2 Pendant une journée habituelle, en moyenne 12000 personnes visitent la tour Eiffel. Or, s'il y a grève de la RATP cette moyenne se réduit à 2000. Soit X le nombre de visiteurs de la tour en une journée. On suppose que X suit une loi de Poisson dans les deux cas, mais avec deux paramètres distincts. L'expérience montre qu'il y a grève de la RATP en moyenne un mois sur six.

1. Rappeler l'expression de la loi de Poisson de paramètre λ, son espérance et sa variance.
2. Quelle est la valeur de λ en une journée de grève ?
3. Quelle est la probabilité que $X = k$ en une journée habituelle ?
4. Quelle est la probabilité que $X = k$?
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, puis la variance de X. En déduire que X ne suit pas une loi de Poisson.

Exercice 3 Soit $x_1 \cdots x_n$ un échantillon de taille n. On note sa moyenne $\bar{x}$.

1. On suppose que la loi mère est la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ avec σ connu. Donner la formule pour l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour la moyenne μ.
2. Donner l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour la moyenne μ si $\bar{x} = 49$, $\sigma = 4$, $n = 100$ et $\alpha = 5\%$.

Exercice 4

Lors d'une competition de saut en hauteur, un athlète doit franchir des barres placées à 2.00, 2.10, 2.20, 2.30, 2.40 mètres, etc. Pour chaque hauteur, il dispose de trois essais. Pour un saut, on appelle H la hauteur atteinte. Le saut est réussi si la hauteur H est supérieure à la hauteur de la barre. On suppose que H est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [2.05,2.25]. Après un succès, l'athlète passe à la barre suivante. On considère que tous les sauts sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'athlète franchisse la barre de 2.10 au premier saut ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas franchi la barre de 2.10 après trois essais ? En déduire la probabilite qu'il réussisse à passer la barre de 2.10.
3. S'il a franchi la barre des 2.10, quelle est la probabilité qu'il passe la barre de hauteur 2.20 (en au plus trois essais) ?
4. On désigne par X la hauteur de la dernière barre qu'il parvient à franchir. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
5. Déterminez $P(X \geq n)$ où $n \in \{2.00, 2.10, 2.20, 2.30\}$.
6. En déduire la loi de X et son espérance.

Exercice 5 Une pièce a une probabilité p de montrer FACE, quand on la lance. On ne connaît pas la valeur de p. Pour l'estimer, on a lancé la pièce 200 fois et trouvé 89 fois FACE.

1. Donner l'intervalle de confiance de niveau 95% pour p.
2. Affirmez-vous l'hypothèse que la pièce est truquée (c.à.d. $p \neq \frac{1}{2}$) avec confiance de niveau 95% ?