Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2018-2019**

L2 - Informatique | UE : Statistiques pour l'Informatique

Examen du 8 janvier 2019, 14–16 h

Les documents et les téléphones sont interdits. Les calculatrices sont autorisées. Le barême est indicatif.

On fournit les tables suivantes :

Loi normale, $P(X \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$ pour X de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

α	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
z_α	0.842	1.282	1.645	1.96	2.326

Loi de Student : $P(T \leq t(k)_\alpha) = 1 - \alpha$ pour T de loi de Student avec k degrés de liberté.

α	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
$t(10)_\alpha$	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764
$t(11)_\alpha$	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718
$t(12)_\alpha$	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681
$t(13)_\alpha$	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650
$t(14)_\alpha$	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624
$t(15)_\alpha$	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602

Question de cours. [3 pts.] Soient A et B deux évènements de probabilité $P(A)$ et $P(B)$.

1. Que veut dire que A et B sont indépendants ?
2. Énoncer la formule pour la probabilité que A a lieu sachant que B a eu lieu.
3. Énoncer la formule de Bayes, qui exprime $P(A|B)$ en fonction de $P(B|A)$, $P(B|A^c)$, $P(A)$ et $P(A^c)$.

Exercice 1. [5 pts.] Dans un troupeau de moutons contaminé par une maladie, la probabilité qu'un mouton pris au hasard ait la maladie est de 0.2. Un test de dépistage de cette maladie possède les caractéristiques suivantes : si l'animal est malade, le test est positif avec probabilite 0.9 ; s'il est sain, le test est négatif avec probabilité 1.

1. Avec quelle probabilité un test effectué sur un mouton pris au hasard est positif ?
2. Calculer la probabilité que le mouton soit malade si son test est positif.
3. Calculer la probabilité que le mouton soit sain si son test est negatif.
4. On execute le dépistage successivement sur 5 moutons du troupeau. On suppose que tous les moutons sont indépendants vis-a-vis de la maladie et vis-a-vis du résultat du test. Quelle est la probabilité que les 5 moutons soient sains si les 5 tests sont négatifs ?

Exercice 2. [3 pts.] Soit T une variable aléatoire positive de loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

1. Quelle est la fonction de repartition de T ?
2. Quelle est la densité de la loi ?
3. Soit $p = P(T > 1)$. Montrer que $P(n < T \leq n+1) = p^n(1-p)$ pour tout entier n positif.

Exercice 3. [4 pts.] On a procédé à des mesures de concentration en facteur HDL (high-density lipoprotein) du cholestérol du sang chez 172 personnes de sexe masculin âgées entre 30 et 40 ans. On suppose la concentration C suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type σ.

1. On suppose que l'écart type est connu et vaut $\sigma = 10$. On a mesuré une moyenne de 49. Trouver un intervalle de confiance pour la moyenne μ au niveau $0,95$.
2. On suppose maintenant que l'écart type n'est pas connu mais que la variance de l'échantillon est $98,8576$ et la même moyenne mesurée 49. Trouver un intervalle de confiance pour la moyenne μ au niveau $0,90$.

Exercice 4. [5 pts.] Un additif est censé améliorer le rendement d'un carburant et réduire la consommation des véhicules l'utilisant. Pour tester son efficacité, on a effectué deux séries d'observations sur 12 véhicules de même type. Pour chaque véhicule, on fait un essaie en utilisant le carburant sans additif puis un autre essaie en utilisant le carburant avec additif. On note x la consommation quand on utilise le carburant sans additif et y la consommation quand utilise le carburant avec additif. La consommation est mesuré en litre par 100km. Les valeurs observées sont les suivantes :

x	6,4	6,8	6,8	6,5	6,3	6,0	6,2	6,2	6,8	7,1	7,2	6,0
y	6,1	6,7	6,8	6,2	6,4	5,8	6,3	6,2	6,7	6,7	7,0	6,2

On note $z = y - x$ l'amélioration du rendement obtenu grâce à l'additif. On suppose que cette différence z suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnus.

1. Calculer les moyennes de x, y et z.
2. Calculer la variance de l'echantillon z.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance $1 - \alpha = 0,95$.