

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
PARTIE CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Durée : 1h30. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$
2. On pose $g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer g' , g'' , g''' et g'''' . Quelle est leur parité ?
3. En étudiant les variations, montrer successivement que $g'''(x) \leq 0$, $g''(x) \leq 0$, $g'(x) \leq 0$ et $g(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$. Que se passe-t-il pour $x \leq 0$?
4. Si $(x_n)_n$ est une suite avec $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, en déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x_n) - 1}{x_n^2}$.

Exercice 2 : Soit X un ensemble, et X_i une partie finie de X pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $n \geq 1$. On cherche à montrer que

$$\#(\bigcup_{i=1}^n X_i) = \sum_{I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\#I} \#(\bigcap_{i \in I} X_i).$$

Comme indiqué, la somme porte sur toutes les parties I non-vides de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Expliciter les cas $n = 1$ et $n = 2$. On remarquera que $n = 2$ est un théorème du cours qu'on pourra utiliser par la suite.
2. Montrer l'égalité pour $n = 3$.
3. Montrer l'égalité pour n quelconque.

Exercice 3 :

1. (Question de cours) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective, et si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Soient f et h deux fonctions $X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ tels que $f \circ g \circ h$ est injective et $h \circ g \circ f$ est surjective. Montrer que f , g et h sont bijectives.

Exercice 4 : On cherche à étudier la fonction réelle $f(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|$.

1. Donner son domaine maximal de définition D .
2. Chercher le domaine maximal où f est dérivable. Calculer sa dérivée.
3. Calculer les limites en $\pm\infty$ et $\mathbb{R} \setminus D$.
4. Établir le tableau des variations de f .
5. Chercher les asymptotes éventuelles de f .
6. Tracer le graphe de f .

Exercice 5 : Exprimer les phrases suivantes en langage formel. (Dans cette question, X dénote un ensemble et R une relation sur X .)

1. R est une relation d'ordre total sur X .
2. Tout $x \in X$ a un successeur par rapport à R (c'est-à-dire un élément minimal $y \neq x$ avec xRy).