Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Étudier la complétude des parties suivantes de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$: $[0,1]$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.

Exercice 2. On considère sur $]0,+\infty[$ deux distances : celle induite par la valeur absolue $|\cdot|$ et la distance $d :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

1. Justifier que $(]0,+\infty[, |\cdot|)$ n'est pas complet. Donner un exemple de suite qui est de Cauchy dans $(]0,+\infty[, |\cdot|)$ mais qui ne converge pas dans $(]0,+\infty[, |\cdot|)$.
2. Montrer que $(]0,+\infty[, d)$ est complet.
3. Montrer que $id\colon (]0,+\infty[, |\cdot|) \to (]0,+\infty[, d),\ x \mapsto x$ est un homéomorphisme.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue de E dans E telle que $|||T||| < 1$. On note id l'application identité de E dans E. On note, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $T^k = T \circ \ldots \circ T$ (k fois), $T^0 = id$.
   (a) Montrer que la série $\sum T^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Montrer que $id - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, et que $(id-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.
   (c) Dans cette question, on considère l'espace des polynômes réels $\mathbf{R}[X]$, muni de la norme induite par le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Montrer que l'application linéaire $T\colon \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ définie par $T(P) = \frac{X}{2}P(X)$. est continue, que $|||T||| < 1$, et que $id - T$ n'est pas inversible (on montrera que $id - T$ n'est pas surjective).
2. Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ muni de la norme matricielle $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.
   (a) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Pour $A \in GL_n(\mathbf{R})$, montrer que $B\left(A, \frac{1}{|||A^{-1}|||}\right) \subset GL_n(\mathbf{R})$.

Exercice 4. *Autour de la complétude d'espaces de fonctions continues.*

1. Rappeler le théorème du cours qui permet de vérifier que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de fonctions définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : [0,1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire sur $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$?
3. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et que muni de cette norme, $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ est complet.
4. Montrer que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
   Indication : utiliser la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \inf(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$.

Exercice 5. *Autour de la complétude d'espaces de suites.*

Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sous la forme $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$. On considère l'espace vectoriel $\ell^1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty \right\}$, l'espace vectoriel $Conv$ des suites réelles convergentes et ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Montrer ℓ^1 est inclus dans ℓ^∞.
3. Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.
4. Montrer que $(Conv, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique complet, $f\colon X \to X$ et $k \in \mathbf{N}^*$.
On suppose que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Soit K une partie de E compacte, convexe et non vide. Soit $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne.

1. Soit $a \in K$. On définit pour tout entier $n \geqslant 2$, $f_n : K \to E$, $x \mapsto \dfrac{1}{n}a + \dfrac{n-1}{n}f(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $f_n(K) \subset K$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, f_n admet un unique point fixe dans K. On le note x_n.
2. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $\kappa \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$, $|f'(x)| \leqslant \kappa$.
2. Montrer que f est contractante sur $[a - \delta, a + \delta]$ et que $f([a - \delta, a + \delta]) \subset [a - \delta, a + \delta]$.
3. Montrer que pour tout $u_0 \in [a-\delta, a+\delta]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.
   On dit que le point fixe a est attractif.

Exercice 9. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 4x = \sin(x + y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \\ 3y = 3 + 2\arctan(x - y). \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ telle que $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ soit solution de (1) si et seulement si (x, y) est un point fixe de f.
2. Montrer que f est contractante de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans lui-même. *On commencera par montrer les deux inégalités suivantes : pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, $|\sin(a) - \sin(b)| \leqslant |a - b|$ et $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leqslant |a - b|$.*
3. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans $\mathbf{R}^2$.

Exercice 10. On note E l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme uniforme : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Soit $K \in \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbf{R})$, on note $\|K\|_\infty = \sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x, y)|$.
Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in [0, 1],\ Tf(x) = \int_0^x K(x, y)f(y)\, dy.$$

On admet que $Tf \in E$. On a ainsi défini une application linéaire $T : E \to E$.

1. Montrer que T est continue.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, tout $f \in E$, tout $x \in [0,1]$, $|T^k(f)(x)| \leqslant \dfrac{\|K\|_\infty^k \, x^k}{k!}\|f\|_\infty$.
3. En déduire que, pour $k \geqslant 1$, on a $|||T^k||| \leqslant \dfrac{\|K\|_\infty^k}{k!}$.
4. En déduire que la série $\sum T^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$. Déterminer sa limite.
5. Montrer que, pour tout $g \in E$ l'équation $Tf = f + g$ a exactement une solution.

Exercice 11. Soit (X,d) un espace métrique. On suppose que X est complet, et on fixe une partie A dense dans X, ainsi qu'une application $f\colon A \to X$ qui est *isométrique*, c'est-à-dire telle que

$$\forall a, a' \in X \quad d(f(a), f(a')) = d(a, a') \ .$$

1. Montrer que f se prolonge de façon unique en une fonction continue $\tilde{f}\colon X \to X$, et que $\tilde{f}$ est isométrique.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est surjective si, et seulement si, $f(A)$ est dense dans X.

Exercice 12. *Théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert.*
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère la norme associée $\| \cdot \|$. Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
On suppose que $(E, \| \cdot \|)$ est un espace complet. On dit que E est un *espace de Hilbert.*
On rappelle l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
Soit C une partie convexe non vide et fermée de E. Soit $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe $c \in C$ tel que $\|x - c\| = \inf\limits_{y \in C} \|x - y\|$.
   On considérera une suite minimisante et on montrera qu'elle est de Cauchy.
2. Montrer qu'un tel $c \in C$ est unique. On note $P_C(x)$ ce point.
3. Montrer que $P_C(x)$ est caractérisé par : $\forall y \in C$, $\langle y - P_C(x), x - P_C(x) \rangle \leqslant 0$.
   Interpréter géométriquement cette inégalité.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème de Banach-Steinhaus.*
Théorème. *Soit $(E, \| \cdot \|_E$, $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est complet. Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E vers F, telle que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ soit bornée dans F. Alors la suite des normes $(|||T_n|||)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.*

On se place sous les hypothèses du théorème.

1. *Préliminaire.* Soit $T\colon E \to F$ une application linéaire continue.
   (a) Soit $x, u \in E$. Montrer que $\|T(u)\|_F \leqslant \max(\|T(u+x)\|_F, \|T(u-x)\|)_F$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$ on a
   $$r \cdot |||T||| \leqslant \sup\{\|T(y)\|_F \colon y \in B(x,r)\}.$$
2. *Preuve du théorème.* On raisonne par l'absurde et on suppose que $(|||T_n|||)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas bornée.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et telle que $|||T_{\varphi(n)}||| \geqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   Pour simplifier la notation dans la suite, on suppose $|||T_n||| \geqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(b) À l'aide du résultat de (1b), montrer qu'on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = 0$ et

$$\forall n \geqslant 1 \quad \|x_n - x_{n-1}\|_E \leqslant 3^{-n} \text{ et } \|T_n(x_n)\|_F \geqslant \frac{2}{3}3^{-n}|||T_n||| \ .$$

(c) Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qu'on vient de construire converge dans E ; on note x sa limite.

(d) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|x - x_n\|_E \leqslant \frac{1}{2}3^{-n}$ et en déduire que $\|T_n(x)\|$ tend vers $+\infty$.

(e) Conclure.

Exercice 14. ($\star$) (*lemme de Baire et quelques applications*)

1. On fixe un espace métrique complet (X, d), et une suite $(O_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts de X. On suppose que O_n est dense dans X pour tout $n \in \mathbf{N}$. Notre but est d'établir que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} O_n$ est dense dans X (c'est le *lemme de Baire*)
   (a) Soit U un ouvert non vide de X et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert non vide W tel que $\mathrm{diam}(W) \leqslant \varepsilon$ et $\overline{W} \subset U$.
   (b) On fixe à nouveau U un ouvert non vide de X. Justifier l'existence d'une suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts non vides de X tels que
      i. $\forall n \in \mathbf{N} \quad V_n \subset U \cap \bigcap_{i=0}^n O_i$;
      ii. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \overline{V_{n+1}} \subset V_n$;
      iii. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathrm{diam}(V_n) \leqslant 2^{-n}$.
   (c) Montrer que $\bigcap \overline{V_n}$ est un singleton $\{x\}$, et que $x \in U \cap \bigcap_n O_n$.
   (d) Conclure.
2. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties de E qui sont à la fois fermées et d'intérieur vide. À l'aide du lemme de Baire, montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est d'intérieur vide.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach de dimension infinie, et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E.
   (a) Montrer que chaque $F_n = \mathrm{Vect}(a_0, \dots, a_n)$ est fermé et d'intérieur vide dans E.
   (b) Utiliser le lemme de Baire pour démontrer que, si E est un espace de Banach de dimension infinie, E ne peut pas admettre une base dénombrable.
4. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que E est complet.
   (a) On suppose que pour tout $x \in E$ la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, et on introduit pour tout $m \in \mathbf{N}$
   $$F_m = \{x \in E \colon \forall n \in \mathbf{N} \ \|T_n(x)\| \leqslant m\} \ .$$
   Montrer que chaque F_m est fermé, et que $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbf{N}} F_m = E$.
   (b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que F_m soit d'intérieur non vide, puis qu'il existe M tel que $|||T_n||| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on vient de redémontrer le théorème de Banach-Steinhaus à l'aide du lemme de Baire).
   (c) On suppose maintenant que $(T_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente pour tout $x \in E$. On note $T(x)$ sa limite. Montrer que $T \colon E \to F$ est une application linéaire continue.
   (d) La conclusion du théorème de Banach-Steinhaus reste-t-elle valide si on ne suppose pas que E est complet ?