---

**Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3**

---

**Exercice 1.** *Révisions.* Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}$ (ainsi que ses intervalles) de la distance usuelle. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ? lipschitziennes ?

$$f : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^2, \end{array} \qquad g : \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}, \end{array} \qquad h : \begin{array}{ll} [1,+\infty] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

**Exercice 2.** *Révisions.* On munit $]0,+\infty[$ de la distance usuelle et, pour tout entier $n \geq 0$, on note $f_n$ la fonction

$$\begin{aligned} f_n : ]0,+\infty[ &\to ]0,+\infty[ \\ x &\mapsto \frac{x}{n+x}. \end{aligned}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle. La convergence est-elle uniforme ?

**Exercice 3.** Soit $(X,d)$ et $(Y,\delta)$ deux espaces métriques.

1. Soit $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ deux applications continues.
   (a) Montrer que $\Delta = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $X$.
   (b) Soit $A$ une partie de $X$. Montrer que si $A$ est dense dans $X$ et si pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$ alors pour tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$.
2. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue alors son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times Y$.

**Exercice 4.** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbf{R}\ \forall x' \in \mathbf{R}\ |x - x'[< \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbf{R}\ \forall x' \in \mathbf{R}\ \exists \delta > 0\ |x - x'[< \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

**Exercice 5.** Soit $(X,d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$. On note $\chi_A$ la fonction caractéristique de $A$ définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$. On suppose que $\mathbf{R}$ est muni de la distance usuelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\chi_A$ soit continue.
2. Déterminer l'ensemble des points où $\chi_A$ est continue.
3. Que peut-on dire de $\chi_{\mathbf{Q}}$ ?

**Exercice 6.** Soit $(X,d_X)$ et $(Y,d_Y)$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$. Montrer que $f$ est continue sur $X$ si et seulement si pour toute partie $A$ de $X$, on a $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

**Exercice 7.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On considère la forme linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathbf{R} \\ f &\mapsto f(0). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\varphi$ n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Qu'en est-il si on munit $E$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ ?

**Exercice 8.** Soit $E$ l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que $\mu$ est bien définie et que $\mu$ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de $\mu$.

**Exercice 9.** On considère $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Rappelons que pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, la norme de $u$ vaut $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$.
Soit $\varphi$ l'application de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ vers lui-même qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ associe la suite

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

1. Montrer que $\varphi$ est une application linéaire continue.
2. Déterminer la norme de $\varphi$.

**Exercice 10.** $(\star)$ Soit $(X,d)$ un espace métrique et $f : X \to [0,1]$ une application. Dans cet exercice l'intervalle $[0,1]$ est muni de la distance usuelle.
Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_n : X &\to [0,1] \\ x &\mapsto \inf_{y\in X} (f(y) + nd(x,y)). \end{aligned}$$

0. Remarquer que pour tout $n \geq 0$, on a $f_n \leq f$.
1. Montrer que pour chaque $n \geq 0$, la fonction $f_n$ est $n$-lipschitzienne.
2. Soit $a \in X$. Montrer que

$$\forall r > 0, \quad \forall n \geq 1/r, \quad f_n(a) \geq \inf_{y\in B(a,r)} f(y).$$

3. Montrer que si $f$ est continue en $a$ alors la suite $(f_n(a))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.
4. Montrer que si $f$ est uniformément continue alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f$.
5. En déduire que la fonction racine carrée de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions lipschitziennes.