Examen final 2020 (20 points)

Ex 1 (2 + 1 + 1 = 4 points)

(1) $X \in \{0, 2\}$ $\quad \mathbb{P}(X=0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X=0, Y=n)$

$$= 1-p$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=2, Y=n) = p}_{1 \text{ point}}$$

$$\underbrace{Y \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}(X=0, Y=n) + \mathbb{P}(X=2, Y=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \ \forall n \in \mathbb{N}}_{1 \text{ point}}$$

(2) $\underbrace{\text{Oui. } X \text{ et } Y \text{ sont indép.}}_{1 \text{ point}}$ car $\mathbb{P}(X=k, Y=n) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \{0,2\}$

(3) $\underbrace{Z = X + Y \in \mathbb{N}}_{1 \text{ point}}$ $\quad \mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(X=0, Y=n) + \mathbb{P}(X=2, Y=n-2)$

$$= \begin{cases} (1-p)e^{-\lambda}, & n=0 \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda}, & n=1 \\ \left[(1-p)\frac{\lambda^2}{n(n-1)} + p\right]\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda}, & n \geq 2 \\ = \left[(1-p) + \frac{p\,n(n-1)}{\lambda^2}\right]\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Ex 2 (1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6 points)

(1) $X \in \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour $k \in \mathbb{N}$. (0.5 point)

$\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$. (0.5 point)

(2) si grève, $\underbrace{\lambda = 2000}_{1 \text{ point}}$

(3) si habituelle, $\underbrace{\lambda = 12000, \ \mathbb{P}(X=k) = e^{-12000} \frac{(12000)^k}{k!}}_{1 \text{ point}}, \ \forall k \in \mathbb{N}$

(4) $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=k, \text{grève}) + \mathbb{P}(X=k, \text{pas de grève})$

1 point $= \mathbb{P}(\text{grève})\, e^{-2000} \frac{(2000)^k}{k!} + (1-\mathbb{P}(\text{grève}))\, e^{-12000} \frac{(12000)^k}{k!}$

Il y a grève de la RATP en moyenne un mois sur six. ça veut dire quoi ?

$\underbrace{\text{2 grèves par ans}}$? ou $\underbrace{\text{2 mois de grèves par an}}$?

$\mathbb{P}(\text{grève}) = \frac{2}{365}$? $\mathbb{P}(\text{grève}) = 1/6$? pour la suite.

(5) $\mathbb{E}[X] = 2000 \times \mathbb{P}(\text{grève}) + 12000 \times (1 - \mathbb{P}(\text{grève}))$

(0.5) $= 1{,}03 \times 10^4$

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \mathbb{P}(X=k)$

$= \mathbb{P}(\text{grève})\, \mathbb{E}[\text{Poisson}(2000)^2] + (1-\mathbb{P}(\text{grève}))\, \mathbb{E}[\text{Poisson}(12000)^2]$

$= \frac{1}{6} \times (\text{Var}(\text{Poisson}(2000)) + \mathbb{E}[\text{Poisson}(2000)]^2)$

$+ \frac{5}{6} \times (\text{Var}(\text{Poisson}(12000)) + \mathbb{E}[\text{Poisson}(12000)]^2)$

$= \frac{1}{6} \times (2000 + 2000^2) + \frac{5}{6} \times (12000 + 12000^2)$

(0,5) $= 1{,}207 \times 10^8$

(0,5) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1{,}39 \times 10^7 \neq \mathbb{E}[X]$

(0,5) Donc X ne suit pas une loi Poisson.

Ex 3 (1 + 1 = 2 points)

(1) La formule pour l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour μ :

(1 point) $[\overline{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ où

$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ est la moyenne empirique.

$z_{\alpha/2} : 1 - \frac{\alpha}{2} = \int_{-\infty}^{z_{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq z_{\alpha/2})$

(2) $\alpha = 5\%$ Donc $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. $\bar{x} = 49$, $\sigma = 4$, $n = 100$

L'intervalle de confiance pour μ est

(1 point) $$\left[49 - 1{,}96 \times \frac{4}{\sqrt{100}} , \; 49 + 1{,}96 \times \frac{4}{\sqrt{100}} \right]$$

$$= [48{,}216 , \; 49{,}784].$$

Ex 4 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 points)

(1) L'athlète franchit la barre de 2,00 avec 100% de succès. Donc il passe à la barre 2,10.

$\mathbb{P}$(il ~~franchit~~ 2,10 au premier saut) $= \mathbb{P}(H > 2{,}10)$

$$= \int_{2,10}^{2,25} \frac{1}{0{,}2} \, du = 3/4 \qquad \text{(1 point)}$$

(2) $\mathbb{P}$(il n'a pas franchi 2,10 après 3 essais)

$= \mathbb{P}(H \leq 2{,}10)^3$ car tous les essais sont indép.

(1 point) $= \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

(3) $\mathbb{P}$(il franchit 2,20 | il franchit 2,10)

$= \mathbb{P}$(il franchit 2,20 en 3 essais)

$= 1 - \mathbb{P}(H \leq 2{,}20)^3$

(1 point) $= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}$

(4) $\underbrace{X \in \{2{,}00, 2{,}10, 2{,}20\}}_{\text{(1 point)}}$ puisque $H \in [2{,}05, 2{,}25]$

(5) $\mathbb{P}(X \geq 2{,}00) = 1$ (1/4 point) $\mathbb{P}(X \geq 2{,}10) = 1 - \frac{1}{64}$ par (2) (1/4)
$= \frac{63}{64}$

$\underbrace{\mathbb{P}(X \geq 2{,}20) = \frac{37}{64} \times \frac{63}{64} \text{ par (3) (1/4) } \mathbb{P}(X \geq 2{,}30) = 0}_{\text{(1 point)}}$ par (4) (1/4)

(6) $X \in \{2{,}00,\ 2{,}10,\ 2{,}20\}$

$$\mathbb{P}(X = 2{,}00) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 2{,}10) = \mathbb{P}(\text{il n'a pas franchi } 2{,}10).$$

(1/4 point) $\quad = \dfrac{1}{64}$

$$\mathbb{P}(X=2{,}10) = \mathbb{P}(X \geq 2{,}10) - \mathbb{P}(X \geq 2{,}20)$$

(1/4 point) $\quad = \dfrac{63 \times 27}{64^2}$

$$\mathbb{P}(X=2{,}20) = \mathbb{P}(X \geq 2{,}20)$$

(1/4 point) $\quad = \dfrac{63 \times 37}{64^2}.$

$$\mathbb{E}[X] = 2 \times \mathbb{P}(X=2) + 2{,}10 \times \mathbb{P}(X=2{,}10) + 2{,}20 \times \mathbb{P}(X=2{,}20)$$

$\approx 2{,}16$ (1/4 point)

Ex5 (1+1 = 2 points)

(1) Soit X le nombre de FACE parmi n lancers.

X suit la loi $\text{Bin}(n,p)$. Donc, l'intervalle de confiance pour p est
$$\left[\frac{X}{n} - z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}}{\sqrt{n}} ,\ \frac{X}{n} + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}}{\sqrt{n}} \right]$$

Ici, $n=200$, $x = 89$, $1-\alpha = 95\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Donc, l'intervalle de confiance pour p est
$$\left[\frac{89}{200} - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{\frac{89}{200} \times (1-\frac{89}{200})}}{\sqrt{200}} ,\ \frac{89}{200} + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{\frac{89}{200} \times (1-\frac{89}{200})}}{\sqrt{200}} \right]$$

$$= [0{,}376 \ ,\ 0{,}514]$$

1 point. peut-être des étudiants écrivent directement les chiffres, c'est ok!

(2) Test pour la proportion p. $p_0 = 1/2$

On affirme $p \neq p_0$ avec confiance $1-\alpha$ si $|\bar{x} - p_0| \geq z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}$

Ici, $p_0 = 1/2$, $n = 200$, $\bar{x} = \frac{X}{n} = \frac{89}{200} = 0{,}445$. On voit que

$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$|\bar{x} - p_0| = 0{,}055 < 1{,}96 \times \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2})}}{\sqrt{200}} = 0{,}069$$

Conclusion : on n'affirme pas $p \neq 1/2$. 1 point.