Révision générale

Exercice 1. En utilisant les développements limités au voisinage de 0, montrer les équivalences suivantes :

$$(1)\quad \sin(x) \sim_0 x,\quad (2)\quad \ln(1+x) \sim_0 x,$$

$$(3)\quad \cos(x) - 1 \sim_0 \frac{-x^2}{2},\quad (4)\quad e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 2. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes (quand n tend vers $+\infty$) :

$$(1)\ u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-3},\ (2)\ u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right),\ (3)\ u_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+1},$$

$$(4)\ u_n = \ln\left(\cos(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}})\right),\ (5)\ u_n = (1+\frac{1}{n})^n.$$

Exercice 3. (Exercice 7, Fiche 6) Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$(1)\ u_n = \frac{1}{n(n+1)},\qquad (2)\ u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)},\qquad (3)\ u_n = (-1)^n \ln(\frac{n+1}{n-1}),\qquad (4)\ u_n = \frac{1}{3^n \mathrm{ch} n},$$

$$(5)\ u_n = \frac{\ln n}{n},\qquad (6)\ u_n = \frac{\ln n}{n2^n},\qquad (7)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}},\qquad (8)\ u_n = (1+\sqrt{n})^{-n},$$

$$(9)\ u_n = \frac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})},\qquad (10)\ u_n = \frac{1}{4^n \ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Exercice 4. (Exercice 15, Fiche 7) Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1)\ \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n,\qquad (2)\ \sum (1+\frac{1}{n})^{n^2} z^n,\qquad (3)\ \sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n,\qquad (4)\ \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}.$$

Exercice 5. (Exercice 16, Fiche 7) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1)\ \sum \frac{n^3+1}{3^n} x^n,\qquad (2)\ \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n,\qquad (3)\ \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n,\qquad (4)\ \sum \sin^3(\frac{1}{n}) x^n.$$

Exercice 6. (Exercice 19, Fiche 7) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.

Exercice 7. (Exercice 5, Fiche 8) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - xy' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence.