Révision du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (maths 3, 2018)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ une famille libre de vecteurs de E. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est une méthode qui permet de construire à partir de la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ une famille <u>orthonormée</u> $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ telle que $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}) = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$.

Le procédé est algorithmique et consiste à construire par récurrence $\vec{v_i}$ tel que

$$\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_i}) = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_i})$$

où l'étape de récurrence consiste à construire $\vec{v_{i+1}}$ comme le vecteur normalisé du vecteur

$$\overrightarrow{u_{i+1}} - P_{F_i}(\overrightarrow{u_{i+1}})$$

où $F_i = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_i})$ et $P_{F_i}(\overrightarrow{u_{i+1}})$ désigne la projection orthogonale de $\overrightarrow{u_{i+1}}$ sur F_i.

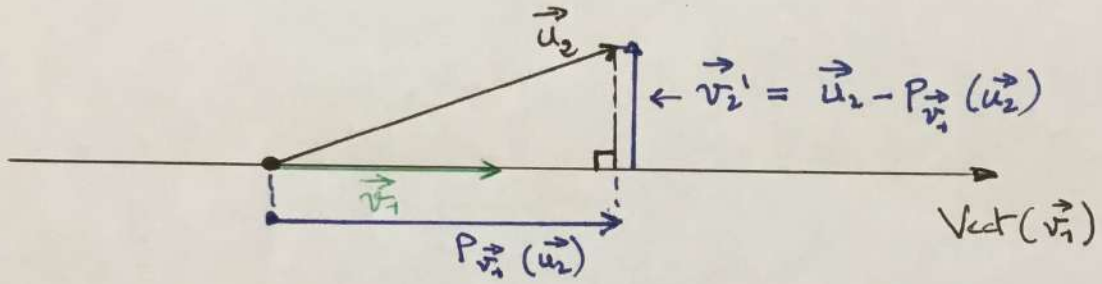
Voyons voir ce qui se passe pour $n=2$. On pose

$$\vec{v_1} = \frac{\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|} \quad \text{et donc} \quad \|\vec{v_1}\| = \frac{\|\vec{u_1}\|}{\|\vec{u_1}\|} = 1 .$$

On voit que la famille $(\vec{v_1})$ est orthonormée et $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}) = \mathrm{Vect}(\vec{v_1})$. L'idée ensuite est de prendre le vecteur

$$\vec{v_2}' = \vec{u_2} - P_{\vec{v_1}}(\vec{u_2})$$

qui est orthogonale à $\vec{v_1}$. Il reste à le rendre normal : $\vec{v_2} = \dfrac{\vec{v_2}'}{\|\vec{v_2}'\|}$.



On voit en particulier que

$$\vec{u_2} = \vec{v_2}' + \underbrace{P_{\vec{v_1}}(\vec{u_2})}_{\in \mathrm{Vect}(\vec{v_1})}$$

et donc $\vec{u_2}$ est une combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. Inversement, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. Donc $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Conclusion, en sachant que $P_{\vec{v_1}}(\vec{u_2}) = \langle \vec{u_2} | \vec{v_1} \rangle \cdot \vec{v_1}$, on a l'algorithme :

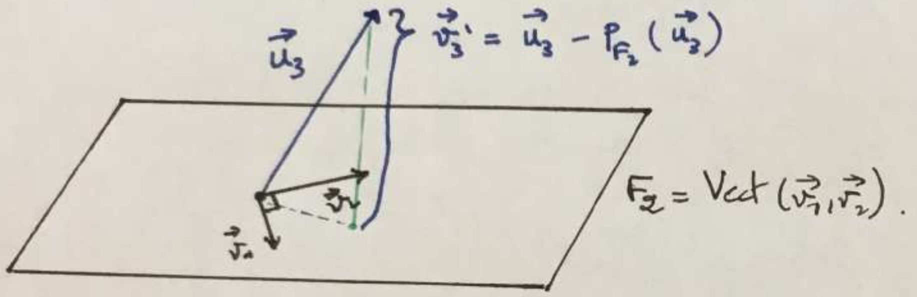
$$\left\|\begin{array}{l} \vec{v_1} = \dfrac{\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|} \ ; \\ \vec{v_2}' = \vec{u_2} - \langle \vec{u_2} | \vec{u_1} \rangle \cdot \vec{v_1} \ ; \quad \vec{v_2} = \dfrac{\vec{v_2}'}{\|\vec{v_2}'\|} . \end{array}\right.$$

Détaillons également l'algorithme pour $n=3$. Jusqu'à $i=3$, le procédé est le même :

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \; ; \; \vec{v}_2' = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 | \vec{u}_1 \rangle . \vec{v}_1 , \; \vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2'}{\|\vec{v}_2'\|} .$$

Pour construire $\vec{v}_3$, l'idée est toujours la même, on utilise la projection orthogonale, on prend :

$$\vec{v}_3' = \vec{u}_3 - P_{F_2}(\vec{u}_3) \; , \; \text{où} \quad F_2 = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) .$$



En conclusion, en sachant $P_{F_2}(\vec{u}_3) = \langle \vec{u}_3 | \vec{v}_1 \rangle . \vec{v}_1 + \langle \vec{u}_3 | \vec{v}_2 \rangle . \vec{v}_2$,

on a l'algorithme :

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \\ \vec{v}_2' = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 | \vec{v}_1 \rangle . \vec{v}_1 \; ; \; \vec{v}_2 = \dfrac{\vec{v}_2'}{\|\vec{v}_2'\|} \; ; \\ \vec{v}_3' = \vec{u}_3 - \left(\langle \vec{u}_3 | \vec{u}_1 \rangle . \vec{v}_1 + \langle \vec{u}_3 | \vec{v}_2 \rangle . \vec{v}_2 \right) ; \; \vec{v}_3 = \dfrac{\vec{v}_3'}{\|\vec{v}_3'\|} . \end{array} \right.$$

Plus généralement, l'algorithme se présente comme suit :

(1) On pose $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$;

(2) Supposons que la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i)$ soit construite, pour $1 \leq i \leq n-1$. On définit, alors :

$$\vec{v}'_{i+1} = \vec{u}_{i+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{i} \langle \vec{u_{i+1}} \mid v_k \rangle \cdot v_k}_{\substack{\text{Projection de } \vec{u_{i+1}} \text{ sur} \\ F_i = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i)}} \; ; \quad \vec{v}_{i+1} = \frac{\vec{v}'_{i+1}}{\|\vec{v}'_{i+1}\|} .$$

<u>Correction détaillée de l'exercice 3 de la fiche 5</u>

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on dispose de la famille de vecteurs :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

On applique le procédé de Gram-Schmidt :

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{u}_1 .$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 \mid \vec{v}_1 \rangle \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix} .$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}'_2}{\|\vec{v}'_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} .$$

On a :

$$\vec{v_3}' = \vec{u_3} - \left(\langle \vec{u_3} | \vec{v_1} \rangle \cdot \vec{v_1} + \langle \vec{u_3} | \vec{v_2} \rangle \cdot \vec{v_2} \right) \quad \text{et}$$

$$\langle \vec{u_3} | \vec{v_1} \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\langle \vec{u_3} | \vec{v_2} \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} (1 + 4 - 3) = \frac{2}{\sqrt{6}} .$$

D'où :

$$\langle \vec{u_3} | \vec{v_1} \rangle \cdot \vec{v_1} + \langle \vec{u_3} | \vec{v_2} \rangle \cdot \vec{v_2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2}{6} \\ \frac{4}{6} \\ \frac{-2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Donc : $\vec{v_3}' = \vec{u_3} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Finalement : $\vec{v_3} = \dfrac{\vec{v_3}'}{\|\vec{v_3}'\|} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Enfin :

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$